

HERRAMIENTAS DE RAZONAMIENTO AUTOMÁTICO EN GEOGEBRA DISCOVERY: PROPUESTAS EDUCATIVAS

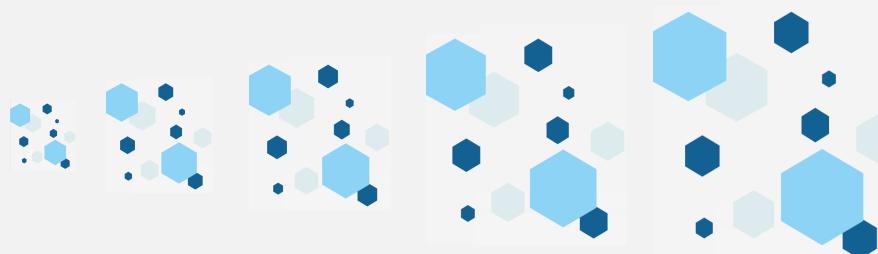
Matemáticas,
más de lo que imaginas



XVI CONGRESO REGIONAL DE
EDUCACIÓN MATEMÁTICA
V JORNADA DE GEOGEBRA
CASTILLA Y LEÓN

Tomás Recio
Universidad Antonio de Nebrija

Angélica Martínez-Zarzuelo
Universidad Complutense de Madrid





ÍNDICE

QUÉ **1. Razonamiento automático en GeoGebra Discovery**

POR QUÉ **2. Conexión con las competencias y los sentidos matemáticos**

CÓMO **3. Propuestas para el aula**



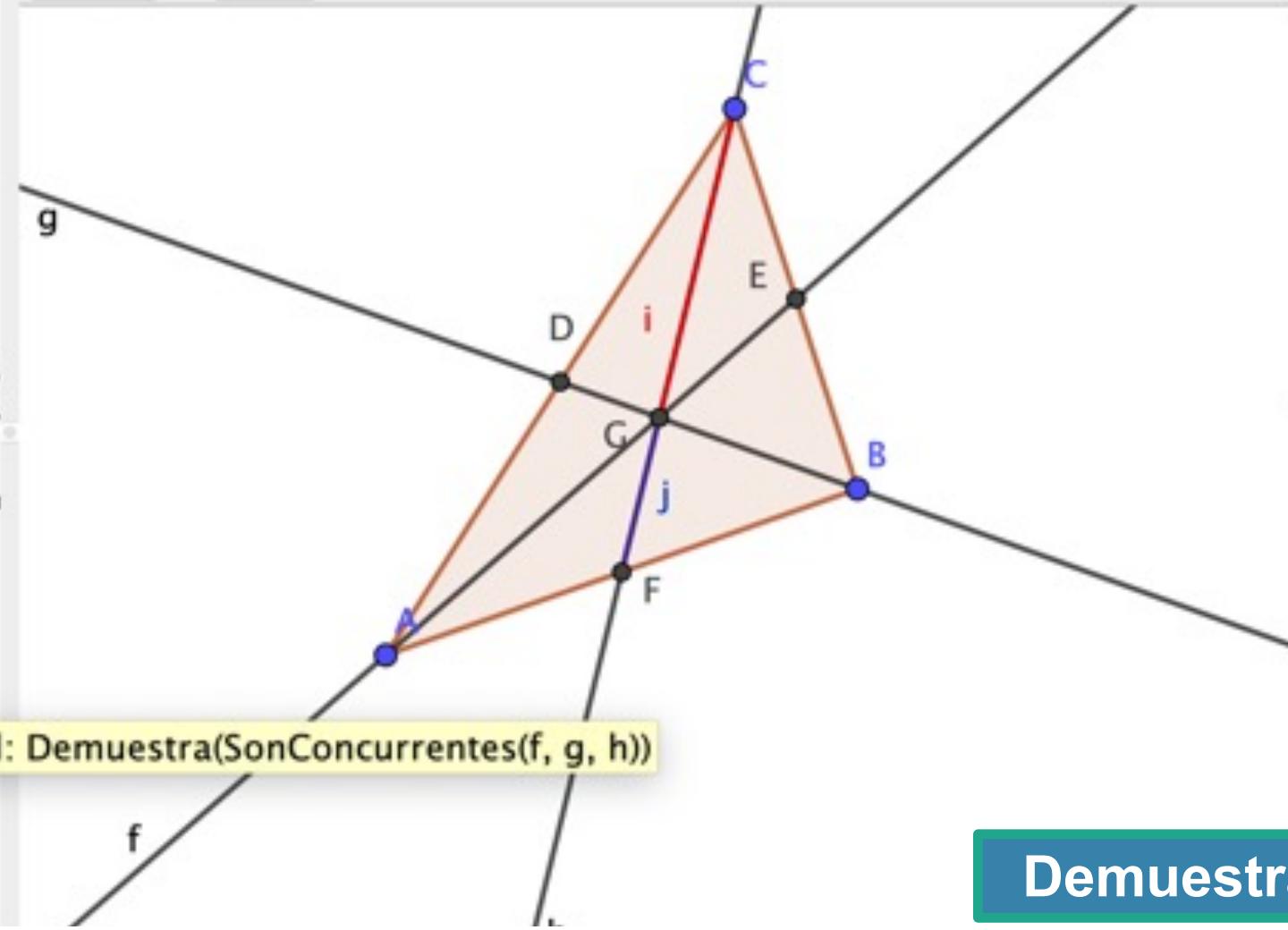
1. Razonamiento automático en GeoGebra Discovery

- GeoGebra Discovery
<https://kovzol.github.io/geogebra-discovery/>
- Off-line GeoGebra 5 Discovery y GeoGebra 6 Discovery
<https://github.com/kovzol/geogebra/releases>
- On-line GeoGebra 6 Discovery
<https://autgeo.online>
- Autómata Geómetra
<https://autgeo.online/ag/automated-geometer.html?offline=1>

- Hohenwarter, M., Kovács, Z. y Recio, T. (2019). Determinando propiedades geométricas simbólicamente con GeoGebra. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas. Volumen 100, mayo de 2019, págs. 79-84. Accesible en https://drive.google.com/file/d/1u_MO7fJXcSFu5FqXulgkhj-WnNo6z1L2/view
- Botana, F., Kovács, Z., Recio, T. y Vélez, M. P. (2020). Hacia un autómata geómetra. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, Vol. 23, Núm. 2, págs. 343-371. Accesible en <http://gaceta.rsme.es/vernumero.php?id=114>
- Recio, T., Van Vaerenbergh, S. y Vélez, M. P. (2020). Herramientas de Razonamiento Automático en GeoGebra: qué son y para qué sirven. Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Año XVI - Número 59. Agosto 2020, págs. 08-15. Accesible en <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/202>
- Martínez-Zarzulo, A. y Recio, T. (2025). Herramientas de razonamiento automático en GeoGebra Discovery: Recursos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Boletín Soc. Puig Adam. Oct. 2025

- $A = (-2.08, -0.86)$
- $B = (2.22, 0.66)$
- $C = (1.1, 4.14)$
- $b = 5.93$
- $a = 3.66$
- $c = 4.56$
- $t1 = 8.33$
- $D = (-0.49, 1.64)$
- $E = (1.66, 2.4)$
- $f: -3.26x + 3.74y = 3$
- $g: -0.98x - 2.71y = -$
- $F = (0.07, -0.1)$
- $h: 4.24x - 1.03y = 0.4$
- $G = (0.41, 1.31)$
- $i = 4.36$
- $j = 1.45$
- $d = \text{true}$

Valor Lógico d : Demuestra(SonConcurrentes(f, g, h))



Demuestra

GeoGebra Classic 5

Vista Algebraica

A = (-0.98, 2.12)
B = (1.86, 2.46)
C = (0.44, 2.29)
c: $(x - 0.44)^2 + (y - 2.29)^2 = 2.05$
D = (0.85, 3.66)
f: $1.54x - 1.83y = -5.38$
g: $1.2x + 1.01y = 4.73$
l1 = {true, {"SonIguales[A,B]}}

Lista l1: DemuestraDetalles(SonPerpendiculares(f, g))

Entrada:

DemuestraDetalles

The diagram shows a circle with center C. Points A, B, and D are on the circumference. Line f passes through points A and B. Line g is tangent to the circle at point D. The angle between line f and line g at point D is 90 degrees, indicating they are perpendicular.

A screenshot of a GeoGebra window. The top menu bar includes icons for selection, text entry, point creation, line creation, angle creation, circle creation, polygon creation, and other geometric tools. Below the menu are two panes: "Vista Algebraica" on the left and "Vista Gráfica" on the right.

Vista Algebraica:

- $A = (-2.08, -0.86)$
- $B = (2.22, 0.66)$
- $C = (1.1, 4.14)$
- $b = 5.93$
- $a = 3.66$
- $c = 4.56$
- $t1 = 8.33$
- $D = (-0.49, 1.64)$
- $E = (1.66, 2.4)$
- $f: -3.26x + 3.74y = 3$
- $g: -0.98x - 2.71y = -$
- $F = (0.07, -0.1)$
- $h: 4.24x - 1.03y = 0.$
- $G = (0.41, 1.31)$
- $i = 4.36$
- $j = 1.45$
- $d = \text{true}$
- $k = 2.28$
- $H = (0.59, 2.02)$

Vista Gráfica:
 The diagram shows triangle ABC with vertices A(-2.08, -0.86), B(2.22, 0.66), and C(1.1, 4.14). Point D is on segment AB with coordinates (-0.49, 1.64). Point E is on segment AC with coordinates (1.66, 2.4). Line f passes through A and D. Line g passes through A and E. Line h passes through B and C. Point F is the intersection of lines f and g, located at (0.07, -0.1). Point G is the intersection of lines f and h, located at (0.41, 1.31). Point H is the intersection of lines g and h, located at (0.59, 2.02). Point K is the intersection of segments DE and FG, located at (0.22, 1.48). A shaded orange triangle is formed by points D, E, and F. A green shaded quadrilateral is formed by points D, E, G, and H. A red shaded triangle is formed by points F, G, and H.

Relación

Lo que es generalmente cierto es que:

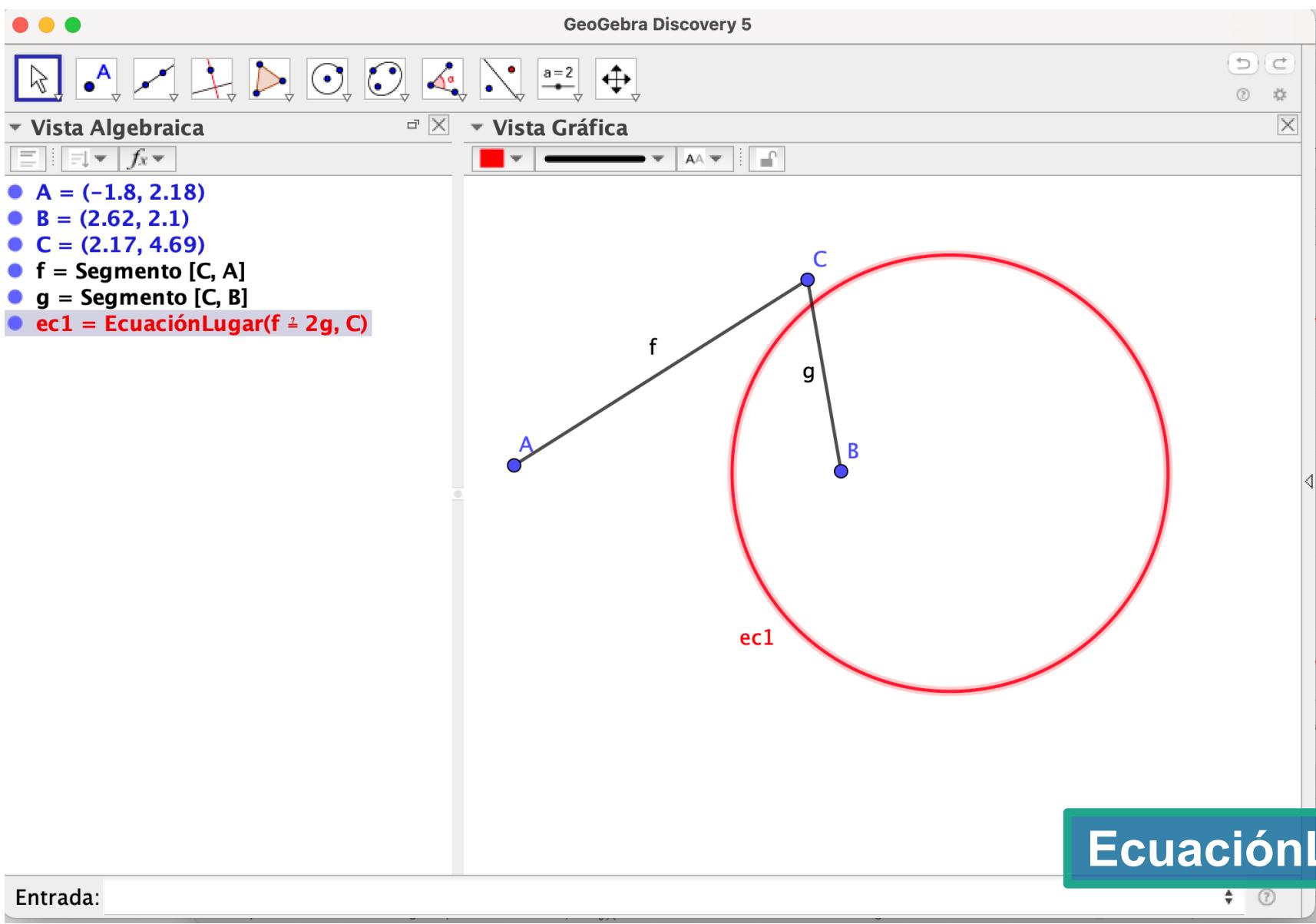
- Distancia(D, H) y Distancia(H, E) son iguales

bajo la condición:

- A y B no son iguales y
- Triángulo ABC no-degenerado

OK

Relación





Halla el lugar geometrico de los puntos C tales que AC es el doble de BC, donde A y B son dos puntos arbitrarios.



El lugar geométrico de los puntos C tales que $AC = 2BC$, donde A y B son puntos fijos, es un círculo cuyo centro está en un punto sobre el segmento AB y que pasa por B .

<https://chatgpt.com/share/44a3a945-a442-4e49-91d4-eb6497076242>



Relación

Vista Algebraica

- A = (-2.08, -0.86)
- B = (2.22, 0.66)
- C = (1.1, 4.14)
- b = 5.93
- a = 3.66
- c = 4.56
- t1 = 8.33
- D = (-0.49, 1.64)
- E = (1.66, 2.4)
- f: $-3.26x + 3.74y = 3$
- g: $-0.98x - 2.71y = -$
- F = (0.07, -0.1)
- h: $4.24x - 1.03y = 0.$
- G = (0.41, 1.31)
- i = 4.36
- j = 1.45
- d = true

Vista Gráfica

Relación

i no tiene la misma longitud que j
(comprobado numéricamente)

i y j son paralelas
(comprobado numéricamente)

OK

Más...

Vista Algebraica

- A = (-2.08, -0.86)
- B = (2.22, 0.66)
- C = (1.1, 4.14)
- b = 5.93
- a = 3.66
- c = 4.56
- t1 = 8.33
- D = (-0.49, 1.64)
- E = (1.66, 2.4)
- f: $-3.26x + 3.74y = 3$
- g: $-0.98x - 2.71y = -$
- F = (0.07, -0.1)
- h: $4.24x - 1.03y = 0.4$
- G = (0.41, 1.31)
- i = 4.36
- j = 1.45
- d = true
- k = 2.28

Vista Gráfica

Relación

Distancia(D, E) y Distancia(A, B) no son iguales
(comprobado numéricamente)

OK

Vista Algebraica

- A = (-2.08, -0.86)
- B = (2.22, 0.66)
- C = (1.1, 4.14)
- b = 5.93
- a = 3.66
- c = 4.56
- t1 = 8.33
- D = (-0.49, 1.64)
- E = (1.66, 2.4)
- f: $-3.26x + 3.74y = 3$
- g: $-0.98x - 2.71y = -$
- F = (0.07, -0.1)
- h: $4.24x - 1.03y = 0.$
- G = (0.41, 1.31)
- i = 4.36
- j = 1.45
- d = true
- k = 2.28
- H = (0.59, 2.02)

Vista Gráfica

Relación

a + b y c no son iguales
(comprobado numéricamente)

OK

Relación

Vista Algebraica

- A = (-2.08, -0.86)
- B = (2.22, 0.66)
- C = (1.1, 4.14)
- b = 5.93
- a = 3.66
- c = 4.56
- t1 = 8.33
- D = (-0.49, 1.64)
- E = (1.66, 2.4)
- f: $-3.26x + 3.74y = 3$
- g: $-0.98x - 2.71y = -$
- F = (0.07, -0.1)
- h: $4.24x - 1.03y = 0.$
- G = (0.41, 1.31)
- i = 4.36
- j = 1.45
- k = 2.28
- H = (0.59, 2.02)
- d = true

Vista Gráfica

Relación

Lo que es generalmente cierto es que:

- $i = 3 \cdot j$

bajo la condición:

- la construcción no es degenerada

i y j son paralelas (comprobado numéricamente)

Más... OK

4actividad 2 kwait.ggb

Vista Algebraica

- B = (1.5, 0.22)
- f = 5.5
- C = (-1.25, 0.22)
- g = 2.75
- h = 5.5
- polígono1 = 30.25
- F = (1.5, 2.97)
- I = 6.15
- m = 6.15
- n = 7.78
- G = (-2.17, 2.05)
- H = (-0.33, 3.89)
- p = 2.59
- q = 2.59
- r = 2.59
- texto1 = "Relación(p,q)"

Vista Gráfica

Entrada:

Relación

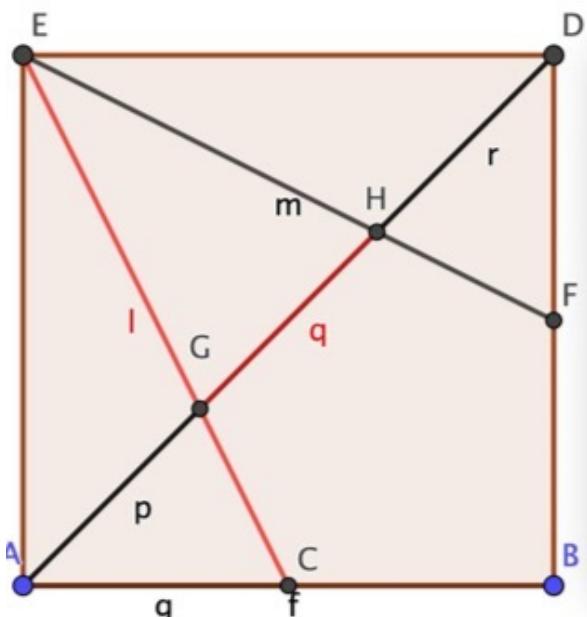
Lo que es generalmente cierto es que:

- $I = (3/4 \cdot \sqrt{10}) \cdot q$

bajo la condición:

- la construcción no es degenera

OK



Dado un cuadrilátero $ABDE$, sea C el punto medio de AB y F el punto medio de BD . Sea G la intersección de la diagonal AD con la recta EC y sea H la intersección de la misma diagonal con la recta EF . Halla la relación entre los segmentos EC y GH .



Dado un cuadrilátero $ABDE$ con C el punto medio de AB , F el punto medio de BD , G la intersección de la diagonal AD con la recta EC , y H la intersección de la misma diagonal AD con la recta EF , demostraremos que los segmentos EC y GH guardan la relación $GH = \frac{1}{2}EC$

<https://chatgpt.com/share/44a3a945-a442-4e49-91d4-eb6497076242>

Question 529.

THÉORÈME. — *Dans tout triangle, le produit des rapports de chaque côté à la somme des deux autres, ne dépasse pas $\frac{1}{8}$.*

(E. CESARO.)

Le théorème revient à prouver l'inégalité

$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} < \frac{1}{8}. \quad \dots \quad (1)$$

Or, la moyenne géométrique de deux nombres est plus petite que leur moyenne arithmétique ; ainsi :

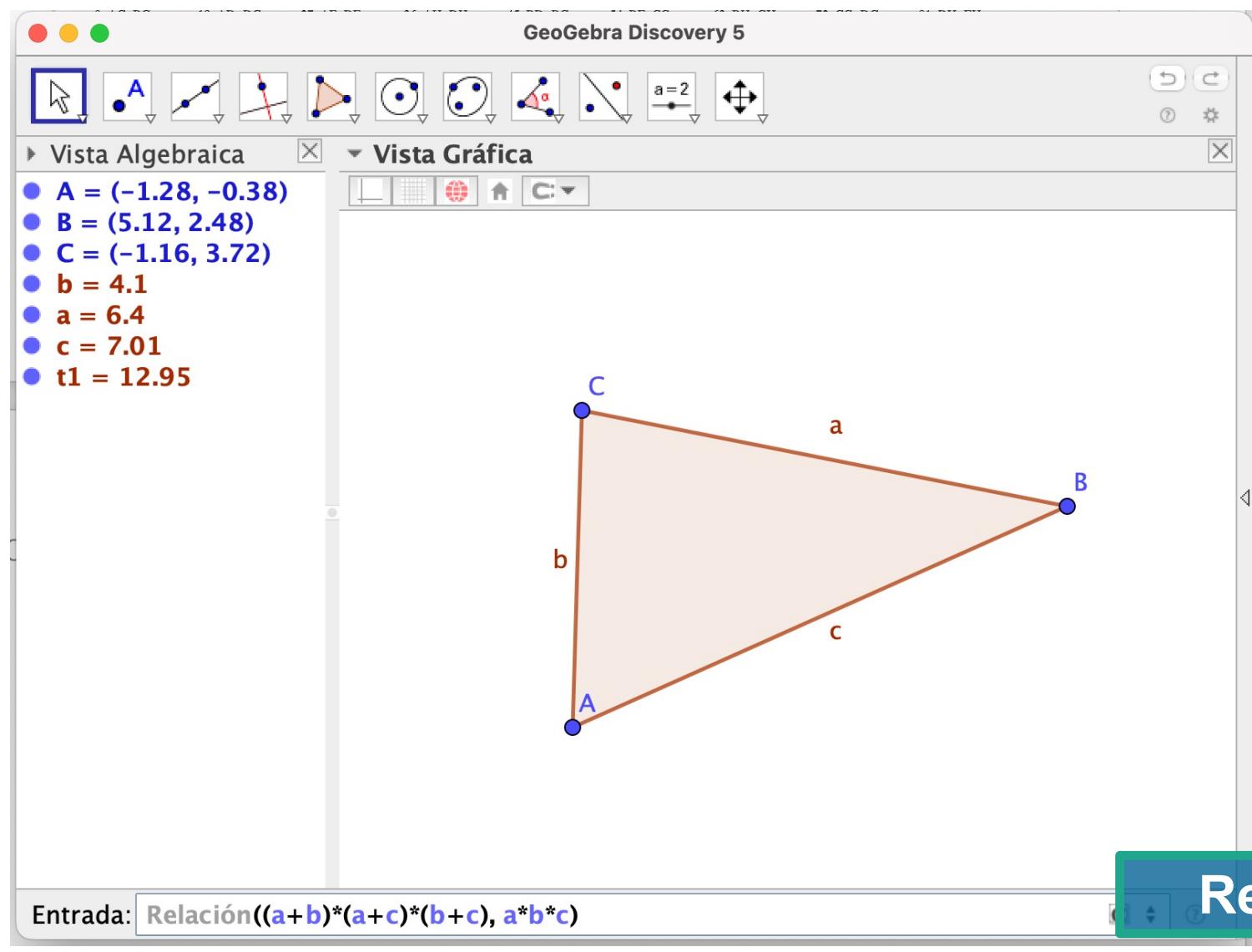
$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}, \quad \sqrt{bc} < \frac{b+c}{2}, \quad \sqrt{ac} < \frac{a+c}{2}.$$

On conclut, de ces inégalités,

$$abc < \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} (*).$$

(E. FAUQUEMBERGUE.)

Autres solutions par MM. Torrès, élève du Lycée de Bordeaux, Leinekugel, étudiant (Paris) et Cocheteux, élève de l'École des Mines (Liège).



Vista Algebraica

- A = (-1.28, -0.38)
- B = (5.12, 2.48)
- C = (-1.16, 3.72)
- b = 4.1
- a = 6.4
- c = 7.01
- t1 = 12.95

Vista Gráfica

The diagram shows a triangle with vertices A, B, and C. The side lengths are labeled: a (top), b (left), and c (bottom). The triangle is shaded in light orange.

Relación

Lo que es generalmente cierto es que:

- $((a + b)(a + c)(b + c)) \geq (8) \cdot (a b c)$

bajo la condición:

- la construcción no es degenerada

OK

Relación

4actividad 2 kwait.ggb

Vista Algebraica

- A = (-0.94, 0.48)
- B = (4.56, 0.48)
- f = 5.5
- C = (1.81, 0.48)
- g = 2.75
- h = 5.5
- polígono1 = 30.25
- F = (4.56, 3.23)
- I = 6.15
- m = 6.15
- n = 7.78
- G = (0.89, 2.31)
- H = (2.73, 4.15)
- p = 2.59
- q = 2.59
- r = 2.59
- texto1 = "Relación(p,q) p=
- I1 = {true, {"SonIguales(A,I
- I2 = {true}
- texto3 = "Relación(4*g^2,

Vista Gráfica

Teoremas descubiertos con el punto G

Puntos colineales: ADGH

Puntos concíclicos: CFGH

Líneas paralelas y perpendiculares:

- ABC \perp BDF
- ADGH \parallel CF \perp BE
- AE \perp DE
- AF \perp BH \parallel CEG
- BG \perp EFH \perp CD

Segmentos congruentes:

- AG = DH = GH
- AH = DG
- BG = BH = EG = EH
- CG = FH
- CH = FG

OK

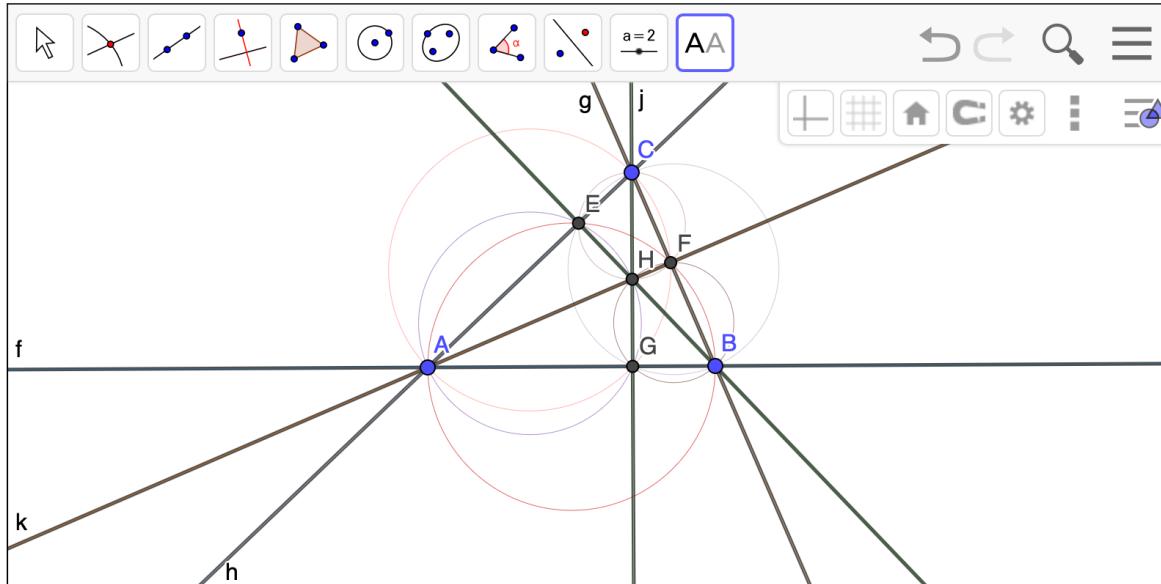
Entrada:

Descubrir

Welcome to the Automated Geometer!

Using GeoGebra 5.0.495.0 (offline).

Let us consider this initial input construction (only the visible points will be observed) :



Select relations to check:

Collinearity of three points
 Equality of distances between two points
 Perpendicularity of segments defined by two points
 Parallelism of segments defined by two points
 Concyclicity of four points

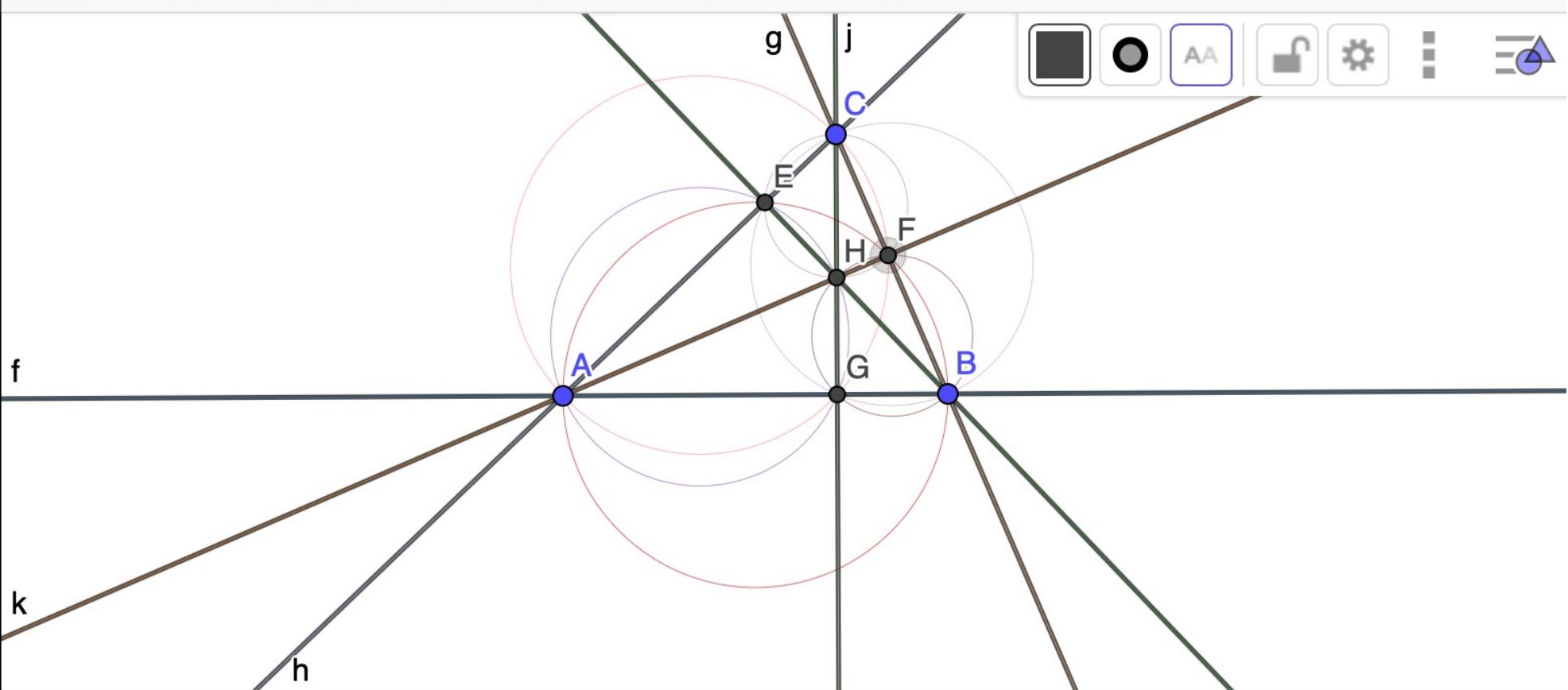
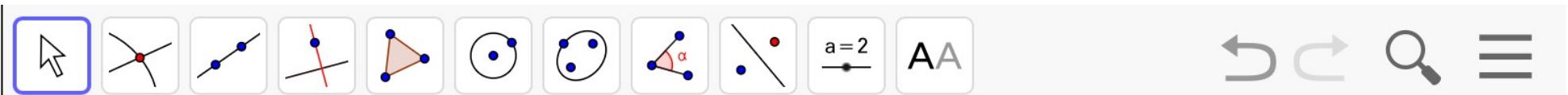
The following theorems can be proven:

- | | | | | | | | | |
|---------------|---------------|---------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1. $G \in AB$ | 3. $H \in AF$ | 5. $H \in BE$ | 7. $F \in \odot ABE$ | 8. $G \in \odot ACF$ | 9. $H \in \odot AEG$ | 10. $G \in \odot BCE$ | 11. $H \in \odot BFG$ | 12. $H \in \odot CEF$ |
| 2. $E \in AC$ | 4. $F \in BC$ | 6. $H \in CG$ | | | | | | |

Finished, found 12 theorems among 280 possible statements.

Elapsed time: 0h 0m 1s

[Restart with a new or the same experiment](#)



GeoGebra Discovery 5

Vista Algebraica

- A = (-1.96, 0)
- B = (3.06, 0.56)
- C = (0.32, 3.54)
- f = Recta A B
- g = Recta C B
- h = Recta A C
- i = Recta que pasa por B perpendicular a h
- j = Recta que pasa por C perpendicular a f
- k = Recta que pasa por A perpendicular a g
- D = (4.32, 3.72)
- E = Intersección de h, i
- F = Intersección de g, k
- G = Intersección de f, j
- c = Circunferencia que pasa por A, B, E
- a = Demuestra(F ∈ c)

Valor Lógico a: Demuestra(F ∈ c)

Entrada:

Demuestra

GeoGebra Discovery 5

Vista Algebraica

- A = (-1.96, 0)
- B = (3.06, 0.56)
- C = (0.32, 3.54)
- f: $-0.56x + 5.02y = 1.1$
- g: $2.98x + 2.74y = 10.65$
- h: $-3.54x + 2.28y = 6.94$
- i: $-2.28x - 3.54y = -8.96$
- j: $-5.02x - 0.56y = -3.59$
- k: $-2.74x + 2.98y = 5.37$
- D = (4.32, 3.72)
- E = (-0.23, 2.68)
- F = (1.04, 2.76)
- G = (0.68, 0.29)
- c: $(x - 0.55)^2 + (y - 0.28)^2 = 6.38$
- a = true

Valor Lógico a: Demuestra($F \in c$)

Entrada:

Demuestra

GeoGebra Discovery 5

Vista Algebraica Cálculo Simbólico (CAS)

A = (-1.96, 0)
B = (3.06, 0.56)
C = (0.32, 3.54)
f: -0.56x + 5.02y =
g: 2.98x + 2.74y = 1
h: -3.54x + 2.28y =
i: -2.28x - 3.54y =
j: -5.02x - 0.56y =
k: -2.74x + 2.98y =
D = (4.32, 3.72)
E = (-0.23, 2.68)
F = (1.04, 2.76)
G = (0.68, 0.29)
c: $(x - 0.55)^2 + (y - 0.29)^2 = 1.7^2$
a = true

Sean A, B, C puntos arbitrarios.
Sea g: recta C B.
Sea h: recta A C.
Sea i: recta que pasa por B perpendicular a h.
Sea k: recta que pasa por A perpendicular a g.
Sea E: intersección de h, i.
Sea F: intersección de g, k.
Sea c: circunferencia que pasa por A, B, E.
Demuestra que F ∈ c.
La proposición es verdad bajo ciertas condiciones de no degeneración (véase abajo).
Demostremos esto por contradicción.
Denotemos el punto libre A como (v1,v2).
Denotemos el punto libre B como (v3,v4).
Denotemos el punto libre C como (v5,v6).
El objeto i introduce las siguientes variables extra:
v7: La coordenada y del punto segundo implicitamente introducido de la recta orthogonal a h por B

Vista Gráfica

ShowProof

GeoGebra Discovery 5

Vista Algebraica □ Cálculo Simbólico (CAS)

13 Denotemos el punto libre B como (v_3, v_4) .

14 Denotemos el punto libre C como (v_5, v_6) .

15 El objeto i introduce las siguientes variables extra:

16 v_7 : La coordenada x del punto segundo implicitamente introducido de la recta ortogonal a h por B

17 v_8 : La coordenada y del punto segundo implicitamente introducido de la recta ortogonal a h por B

18 $e1 := -v_8 + v_5 + v_4 - v_1 = 0$
 $\rightarrow e1 : -v_1 + v_4 + v_5 - v_8 = 0$

19 $e2 := -v_7 - v_6 + v_3 + v_2 = 0$
 $\rightarrow e2 : v_2 + v_3 - v_6 - v_7 = 0$

20 El objeto k introduce las siguientes variables extra:

21 v_9 : La coordenada x del punto segundo implicitamente introducido de la recta ortogonal a g por A

22 v_{10} : La coordenada y del punto segundo implicitamente introducido de la recta ortogonal a g por A

23 $e3 := -v_{10} - v_5 + v_3 + v_2 = 0$
 $\rightarrow e3 : -v_{10} + v_2 + v_3 - v_5 = 0$

24 $e4 := -v_9 + v_6 - v_4 + v_1 = 0$
 $\rightarrow e4 : v_1 - v_4 + v_6 - v_9 = 0$

Vista Gráfica

ShowProof

GeoGebra Discovery 5

Vista Algebraica

Cálculo Simbólico (CAS)

- A = (-1.96, 0)
- B = (3.06, 0.56)
- C = (0.32, 3.54)
- f: -0.56x + 5.02y =
- g: 2.98x + 2.74y = 1
- h: -3.54x + 2.28y =
- i: -2.28x - 3.54y = -
- j: -5.02x - 0.56y = -
- k: -2.74x + 2.98y =
- D = (4.32, 3.72)
- E = (-0.23, 2.68)
- F = (1.04, 2.76)
- G = (0.68, 0.29)
- c: $(x - 0.55)^2 + (y - 0.23)^2 = 1$
- a = true

25 Teniendo en cuenta la definición $E = \text{Interseca}(h, i)$:

26 Denotemos el punto dependiente E como $(v11, v12)$.

27 $e5 := -v11*v6 + v12*v5 + v11*v2 - v5*v2 - v12*v1 + v6*v1 = 0$
 $\rightarrow e5 : -v1\,v12 + v1\,v6 + v11\,v2 - v11\,v6 + v12\,v5 - v2\,v5 = 0$

28 $e6 := v11*v8 - v12*v7 - v11*v4 + v7*v4 + v12*v3 - v8*v3 = 0$
 $\rightarrow e6 : -v11\,v4 + v11\,v8 + v12\,v3 - v12\,v7 - v3\,v8 + v4\,v7 = 0$

29 Teniendo en cuenta la definición $F = \text{Interseca}(g, k)$:

30 Denotemos el punto dependiente F como $(v13, v14)$.

31 $e7 := v13*v6 - v14*v5 - v13*v4 + v5*v4 + v14*v3 - v6*v3 = 0$
 $\rightarrow e7 : -v13\,v4 + v13\,v6 + v14\,v3 - v14\,v5 - v3\,v6 + v4\,v5 = 0$

32 $e8 := v13*v10 - v14*v9 - v13*v2 + v9*v2 + v14*v1 - v10*v1 = 0$
 $\rightarrow e8 : -v1\,v10 + v1\,v14 + v10\,v13 - v13\,v2 - v14\,v9 + v2\,v9 = 0$

33 El objeto c introduce las siguientes variables extra:

34 v15: x value of circle's center

35 v16: y value of circle's center

36 $e9 := 2*v16*v4 - v4^2 + 2*v15*v3 - v3^2 - 2*v16*v2 + v2^2 - 2*v15*v1 + v1^2 = 0$
 $\rightarrow e9 : v1^2 + v2^2 - v3^2 - v4^2 - 2\,v1\,v15 + 2\,v15\,v3 - 2\,v16\,v2 + 2\,v16\,v4 = 0$

37 $e10 := 2*v16*v12 - v12^2 + 2*v15*v11 - v11^2 - 2*v16*v2 + v2^2 - 2*v15*v1 + v1^2 = 0$
 $\rightarrow e10 : v1^2 - v11^2 - v12^2 + v2^2 - 2\,v1\,v15 + 2\,v11\,v15 + 2\,v12\,v16 - 2\,v16\,v2 = 0$

38 Tesis: $F \in c$, en forma algebraica:

39 $T1 := -2*v16*v14 + v14^2 - 2*v15*v13 + v13^2 + 2*v16*v2 - v2^2 + 2*v15*v1 - v1^2 = 0$
 $\rightarrow T1 : -v1^2 + v13^2 + v14^2 - v2^2 + 2\,v1\,v15 - 2\,v13\,v15 - 2\,v14\,v16 + 2\,v16\,v2 = 0$

Vista Gráfica

ShowProof

GeoGebra Discovery 5

Vista Algebraica Cálculo Simbólico (CAS)

40 Tesis por reducción al absurdo (negación de la proposición):

- A = (-1.96, 0)
- B = (3.06, 0.56)
- C = (0.32, 3.54)
- f: $-0.56x + 5.02y = 1$
- g: $2.98x + 2.74y = 1$
- h: $-3.54x + 2.28y = 1$
- i: $-2.28x - 3.54y = 1$
- j: $-5.02x - 0.56y = 1$
- k: $-2.74x + 2.98y = 1$
- D = (4.32, 3.72)
- E = (-0.23, 2.68)
- F = (1.04, 2.76)
- G = (0.68, 0.29)
- c: $(x - 0.55)^2 + (y - 1)^2 = 1$
- a = true

41 v17: variable muda para expresar negación

42 $(T1*v17-1)=0$
 $\rightarrow v17(-v1^2 + v13^2 + v14^2 - v2^2 + 2v1v15 - 2v13v15 - 2v14v16 + 2v16v2) - 1 = 0$

43 e11:=-1-2*v17*v16*v14+v17*v14^2-2*v17*v15*v13+v17*v13^2+2*v17*v16*v2-v17*v2^2+2*v17*v15*v1-v17*v16*v1
 $\rightarrow e11: -v17v2^2 - v1^2v17 + v13^2v17 + v14^2v17 + 2v1v15v17 - 2v13v15v17 - 2v14v16v1$

44 Sin pérdida de generalidad podemos fijar algunas coordenadas:

45 $\{v1=0, v2=0, v3=0, v4=1\}$
 $\rightarrow \{v1 = 0, v2 = 0, v3 = 0, v4 = 1\}$

46 La proposición es cierta bajo ciertas condiciones de no degeneración (que no pueden expresarse en términos

47 endg:-1+v18*v6*v5=0
 $\rightarrow \text{endg} : v18v5v6 - 1 = 0$

48 After substitutions:

49 sndg:-1+v18*v6*v5=0
 $\rightarrow \text{sndg} : v18v5v6 - 1 = 0$

50 The statement requires some conditions:

51 • A y B no son iguales

52 Todas las hipótesis, y la negación de la tesis, tras las sustituciones:

53 s1:1-v8+v5=0
 $\rightarrow \text{s1} : v5 - v8 + 1 = 0$

54 s2:-v7-v6=0
 $\rightarrow \text{s2} : -v6 - v7 = 0$

ShowProof

52	Todas las hipótesis, y la negación de la tesis, tras las sustituciones:
53	s1:1-v8+v5=0 → s1 : v5 - v8 + 1 = 0
54	s2:-v7-v6=0 → s2 : -v6 - v7 = 0
55	s3:-v10-v5=0 → s3 : -v10 - v5 = 0
56	s4:-1-v9+v6=0 → s4 : v6 - v9 - 1 = 0
57	s5:-v11*v6+v12*v5=0 → s5 : -v11 v6 + v12 v5 = 0
58	s6:-v11+v11*v8+v7-v12*v7=0 → s6 : v11 v8 - v12 v7 - v11 + v7 = 0
59	s7:-v13+v13*v6+v5-v14*v5=0 → s7 : v13 v6 - v14 v5 - v13 + v5 = 0
60	s8:v13*v10-v14*v9=0 → s8 : v10 v13 - v14 v9 = 0
61	s9:-1+2*v16=0 → s9 : 2 v16 - 1 = 0
62	s10:2*v16*v12-v12^2+2*v15*v11-v11^2=0 → s10 : -v11^2 - v12^2 + 2 v11 v15 + 2 v12 v16 = 0
63	s11:-1-2*v17*v16*v14+v17*v14^2-2*v17*v15*v13+v17*v13^2=0v5 - v8 + 1 = 0 → s11 : v13^2 v17 + v14^2 v17 - 2 v13 v15 v17 - 2 v14 v16 v17 - 1 = 0

ShowProof

62 $s10: 2*v16*v12 - v12^2 + 2*v15*v11 - v11^2 = 0$

$$\rightarrow s10 : -v11^2 - v12^2 + 2 v11 v15 + 2 v12 v16 = 0$$

63 $s11: -1 - 2*v17*v16*v14 + v17*v14^2 - 2*v17*v15*v13 + v17*v13^2 = 0 v5 - v8 + 1 = 0$

$$\rightarrow s11 : v13^2 v17 + v14^2 v17 - 2 v13 v15 v17 - 2 v14 v16 v17 - 1 = 0$$

64 Consideremos ahora la siguiente ecuación:

65 $s1: (-v17*v18*v11*v12*v13*v5^2 + v17*v18*v11^2*v14*v5^2 - v17*v18*v11*v12*v13*v6^2 + v17*v18*v11^2*v1)$

$$\rightarrow 1 = 0$$

66 **Contradicción! Lo que prueba la proposición original.**

67 La proposición tiene dificultad de grado 7.

ShowProof

2. Conexión con las competencias y los sentidos matemáticos

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.

Ministerio de Educación y Formación Profesional
«BOE» núm. 76, de 30 de marzo de 2022
Referencia: BOE-A-2022-4975

Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato.

Ministerio de Educación y Formación Profesional
«BOE» núm. 82, de 06 de abril de 2022
Referencia: BOE-A-2022-5521





Todo ello con el apoyo de
herramientas tecnológicas

GeoGebra

GeoGebra Discovery





SENTIDOS MATEMÁTICOS

SENTIDO	DESCRIPCIÓN RESUMIDA	PALABRAS CLAVE
Numérico	Comprensión y uso de números y operaciones en distintos contextos, interpretación de relaciones numéricas.	magnitud, estimación, proporcionalidad
Medida	Cuantificar magnitudes, estimar, comparar y aplicar unidades, conectar con la realidad física.	estimar, comparar, precisión
Espacial	Razonar sobre formas, posiciones y movimientos; visualización y relación entre objetos.	forma, transformación, visualización
Algebraico	Generalizar, modelizar, reconocer patrones, usar lenguaje simbólico.	estructura, variable, modelo
Estocástico	Razonar con datos e incertidumbre, interpretar información y tomar decisiones.	probabilidad, representación, interpretación
Socioafectivo	Actitudes hacia las matemáticas: perseverancia, curiosidad, confianza y colaboración.	motivación, reflexión, comunicación

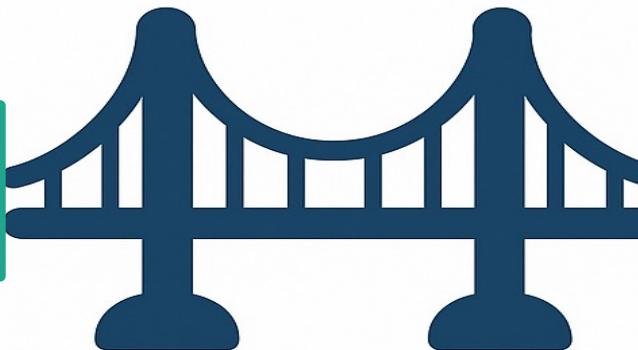


PROCESOS / PRÁCTICAS

Visualización	Representar, manipular e interpretar objetos o relaciones de forma gráfica o geométrica.
Modelización	Traducir situaciones reales o geométricas a representaciones matemáticas (algebraicas, gráficas o simbólicas).
Conjetura	Formular hipótesis a partir de observaciones o regularidades.
Prueba / Argumentación	Razonar deductivamente para justificar conjeturas.
Computación / Algoritmos	Automatizar procesos de cálculo o exploración sistemática, pensamiento computacional.
Comunicación	Explicar, representar y compartir razonamientos o resultados.

GeoGebra Discovery

**SENTIDOS
MATEMÁTICOS**



**PROCESOS /
PRÁCTICAS**



SENTIDOS MATEMÁTICOS

PROCESOS / PRÁCTICAS

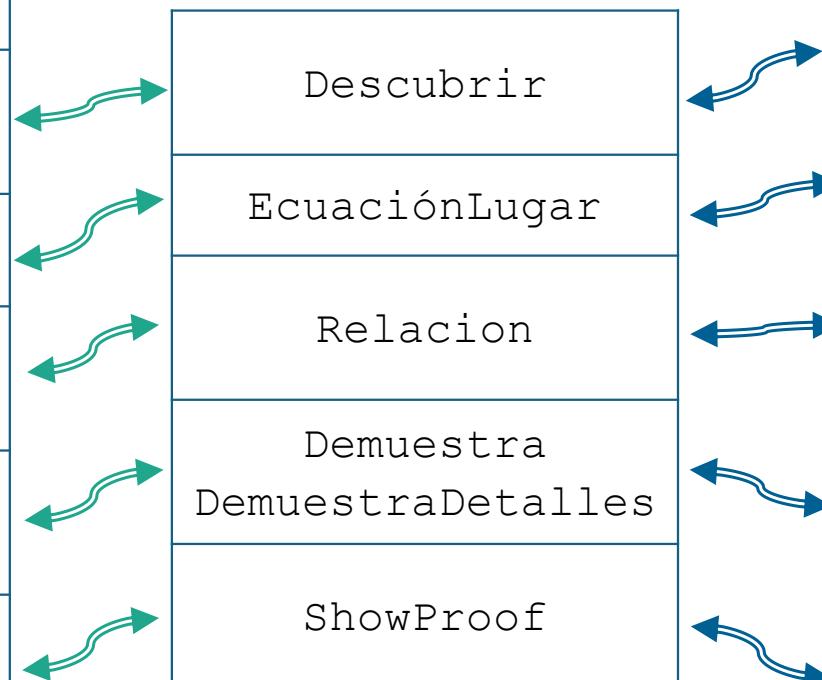
SENTIDOS MATEMÁTICOS	TIPOS DE PENSAMIENTOS QUE PROMUEVEN	PROCESOS ASOCIADOS
Numérico	Pasar de datos concretos a estructuras abstractas y explorar relaciones proporcionales.	Modelización y Computación
Medida	Representar magnitudes y transformaciones, estimar y ajustar modelos.	Modelización y Visualización
Espacial	Razonar sobre invariantes, transformaciones y relaciones geométricas.	Visualización, Conjetura y Prueba
Algebraico	Generalizar patrones, justificar relaciones y automatizar procesos.	Modelización, Conjetura, Prueba y Computación
Estocástico	Interpretar información, expresar incertidumbre y argumentar con datos.	Modelización y Comunicación
Socioafectivo	Expresar ideas y mantener la curiosidad.	Comunicación y Conjetura

SENTIDOS MATEMÁTICOS

PROCESOS / PRÁCTICAS

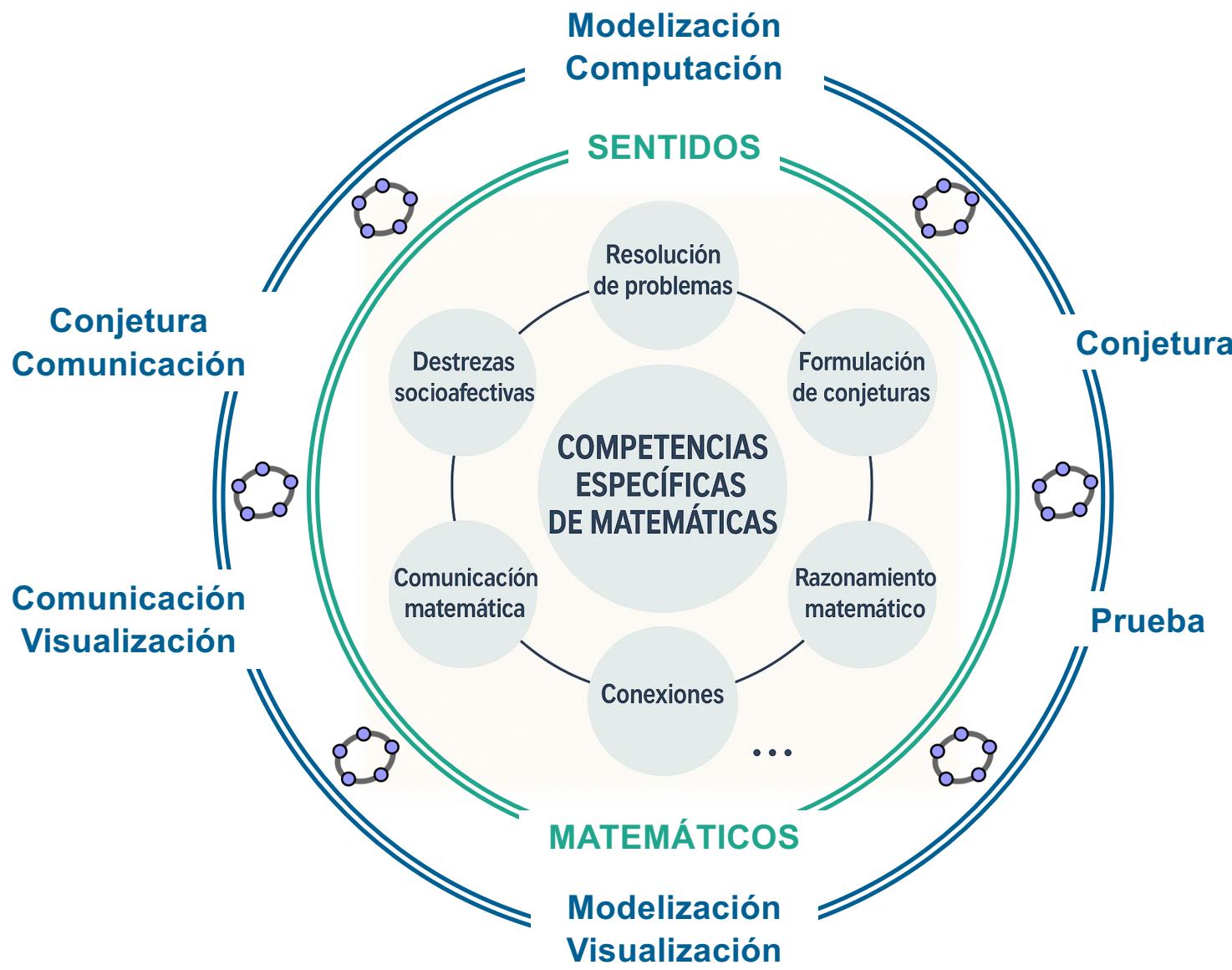
GeoGebra Discovery

QUÉ SENTIDOS POTENCIA
Espacial, Algebraico
Medida, Espacial, Algebraico
Numérico, Algebraico
Algebraico, Espacial
Espacial, Algebraico, Socioafectivo



QUÉ PROCESOS ACTIVA

- Exploración automatizada, generación de conjeturas.
- Modelización geométrica de relaciones algebraicas.
- Detección automática de dependencias simbólicas.
- Formalización de la argumentación, comprobación.
- Visualización paso a paso del razonamiento matemático formal.



I. COMUNIDAD DE MADRID**C) Otras Disposiciones**

Consejería de Educación, Ciencia y Universidades

38

EXTRACTO de la Orden 3176/2024, de 10 de julio, del Consejero de Educación, Ciencia y Universidades, por la que se aprueba la convocatoria del año 2024 de ayudas a proyectos de I+D realizados en colaboración entre grupos de investigación pertenecientes a las universidades y organismos de investigación de la Comunidad de Madrid, en la modalidad de programas de actividades de I+D en procesos humanos y sociales.

Inteligencia aumentada en educación matemática mediante modelización, razonamiento automático e inteligencia artificial

IAxEM-CM/PHS-2024/PH-HUM-383

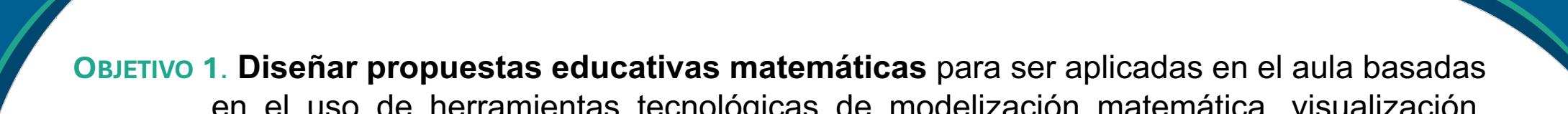


**Comunidad
de Madrid**

Único proyecto de matemáticas y educación concedido en esta convocatoria



Analizar el potencial educativo del uso en el aula de herramientas tecnológicas en combinación con *GeoGebra Discovery*, de modelización matemática, visualización, razonamiento automático e inteligencia artificial en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en las actitudes de los estudiantes hacia la materia.

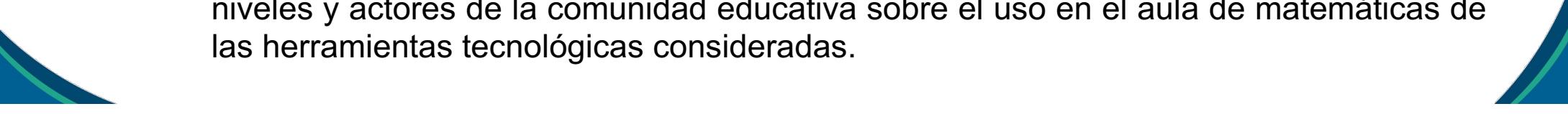


OBJETIVO 1. **Diseñar propuestas educativas matemáticas** para ser aplicadas en el aula basadas en el uso de herramientas tecnológicas de modelización matemática, visualización, razonamiento automático e inteligencia artificial, y en la interacción entre ellas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de forma contextualizada e inclusiva.

OBJETIVO 2. **Configurar un modelo de evaluación** que incluya el diseño y validación de instrumentos de recogida de datos que permita analizar el potencial educativo de las propuestas de innovación diseñadas relativas al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en las actitudes de los estudiantes hacia la materia.

OBJETIVO 3. **Poner en práctica y evaluar las propuestas educativas diseñadas** en centros educativos, centros especializados y Facultades de Educación de la Comunidad de Madrid, dirigidas a estudiantes de Educación Primaria y Secundaria, y a la Formación de Profesorado tanto en formación inicial como en activo.

OBJETIVO 4. **Formular recomendaciones y difundir propuestas de formación** en distintos niveles y actores de la comunidad educativa sobre el uso en el aula de matemáticas de las herramientas tecnológicas consideradas.



3. Propuestas para el aula

san saturio.ggb

Vista Algebraica Vista Gráfica

A = (-2.36, 1.61)
B = (3.44, 1.61)
C = (-0.95, 3.17)
D = (-0.45, 3.17)
f = Recta C D
g = Recta que pasa por C perpendicular a f
c = Circunferencia que pasa por D con centro C
E = Intersección de c, g
h = Recta que pasa por D perpendicular a f
d = Circunferencia que pasa por E con centro D
F = Intersección de d, h
i = Segmento [C, D]
j = Segmento [D, F]

Relación

Lo que es generalmente cierto es que:

- $i = (1/2 \cdot \sqrt{2}) \cdot j$

bajo la condición:

- la construcción no es degenerada

i y j son perpendiculares (comprobado numéricamente)

Más... OK

Entrada:



Soledad.ggb

Vista Algebraica

- A = (-3.04, -5.84)
- B = (13.2, -5.8)
- C = (5.28, -2.28)
- D = (6.78, -0.54)
- E = (8.9, -2.34)
- f: $-1.5x - 1.74y = -6$
- g: $-2.12x + 1.8y = -1$
- F = (7.09, -2.32)
- c: $(x - 7.09)^2 + (y + 2)^2 = 2^2$
- d: $(x - 5.28)^2 + (y + 2)^2 = 2^2$

Vista Gráfica

Entrada:

certificado

lalo bu proposal and questions alias

27/10/2024, 19:20

TKB

Soledad.ggb

Vista Algebraica

- A = (-3.04, -5.84)
- B = (13.2, -5.8)
- C = (5.28, -2.28)
- D = (6.78, -0.54)
- E = (8.9, -2.34)
- f = Mediatriz de CD
- g = Mediatriz de DE
- F = Intersección de f, g
- c = Circunferencia que pasa por C con centro F
- d = Circunferencia que pasa por E con centro C
- h = Segmento [C, F]
- i = Segmento [C, E]

Relación

Lo que es generalmente cierto es que:

- $h \geq ((1/2)) \cdot i$

bajo la condición:

- la construcción no es degenerada

OK

Entrada:

Vista Gráfica



GeoGebra Discovery 5

Vista Algebraica

- A = (2.58, 0.03)
- B = (8.38, 0.03)
- C = (4.3, 1.53)
- D = (4.33, 2.85)
- f = 1.32
- g: $-0.02x - 1.32y = -$
- c: $(x - 4.33)^2 + (y - 2) =$
- E = (5.65, 2.83)
- h: $1.32x - 0.02y = 7.4$
- i: $-0.02x - 1.32y = -2$
- F = (4.99, 2.84)
- G = (5.63, 1.51)
- H = (5.32, 2.83)
- d: $(x - 5.32)^2 + (y - 2) =$
- I = (6.68, 2.81)
- j = 2.35

Vista Gráfica

Relación

Lo que es generalmente cierto es que:

- $\bullet f = ((1/2 \cdot (\sqrt{17} - 3)) \cdot j \text{ o } f = ((1/2 \cdot (\sqrt{17} + 3)) \cdot j$

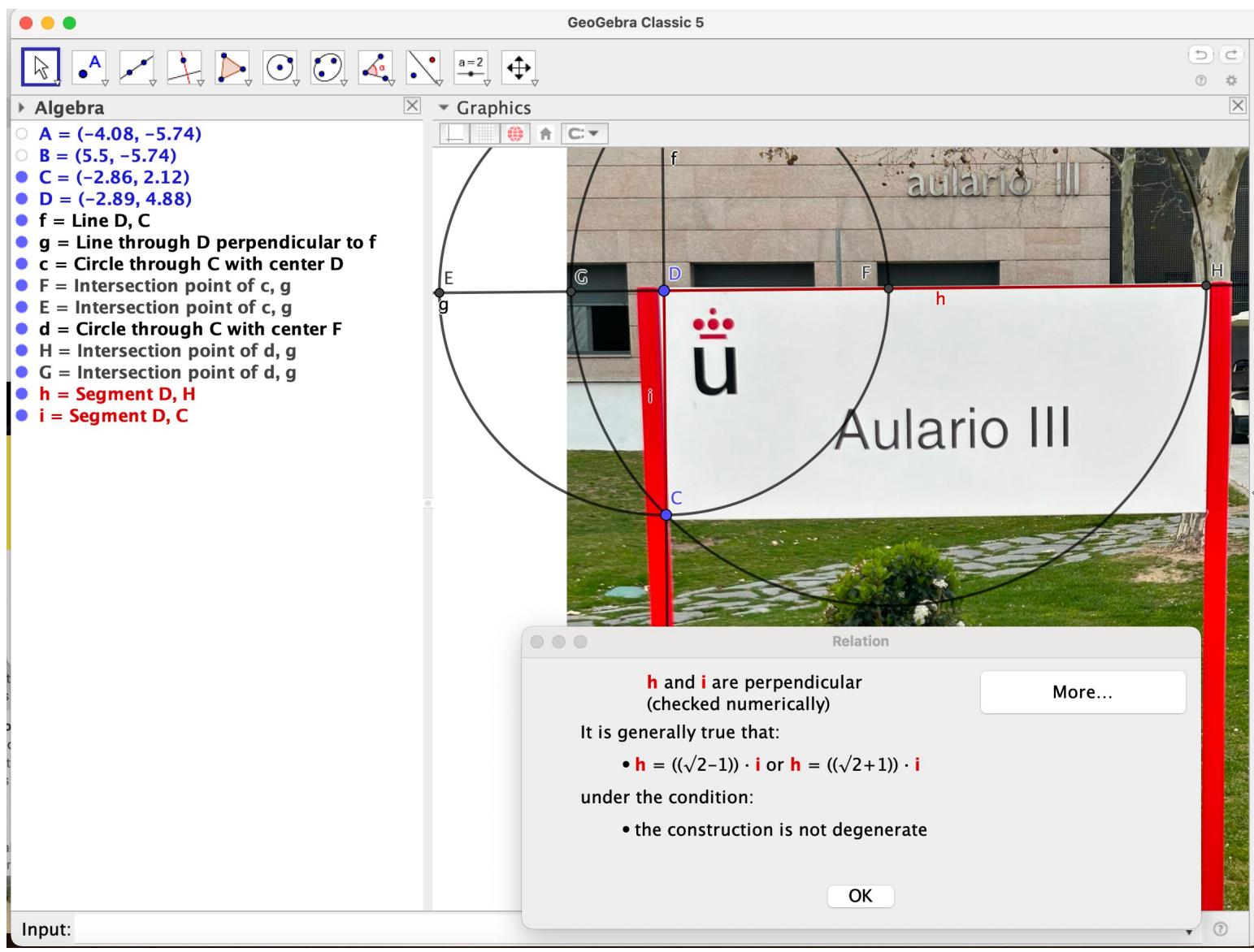
bajo la condición:

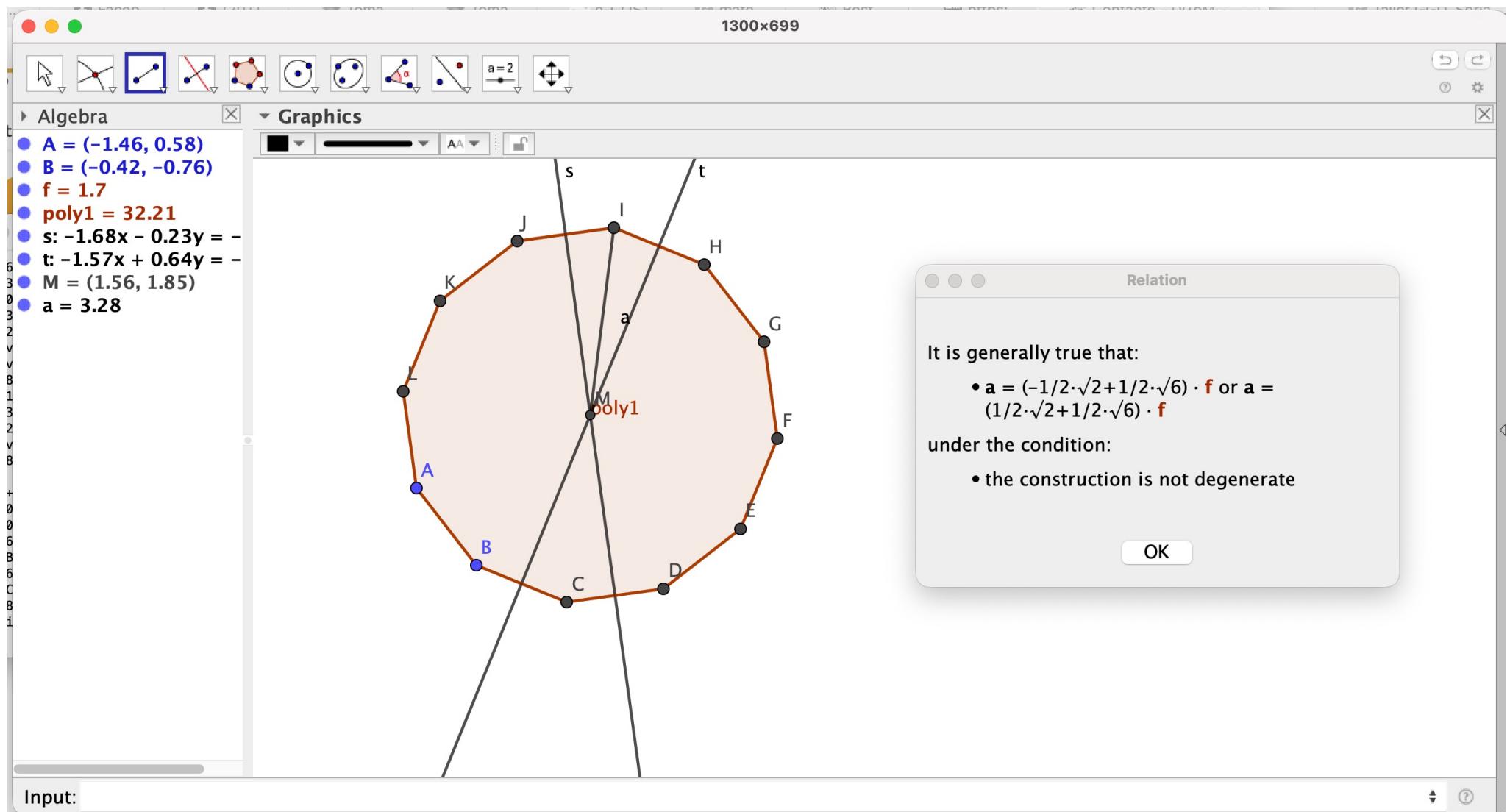
- la construcción no es

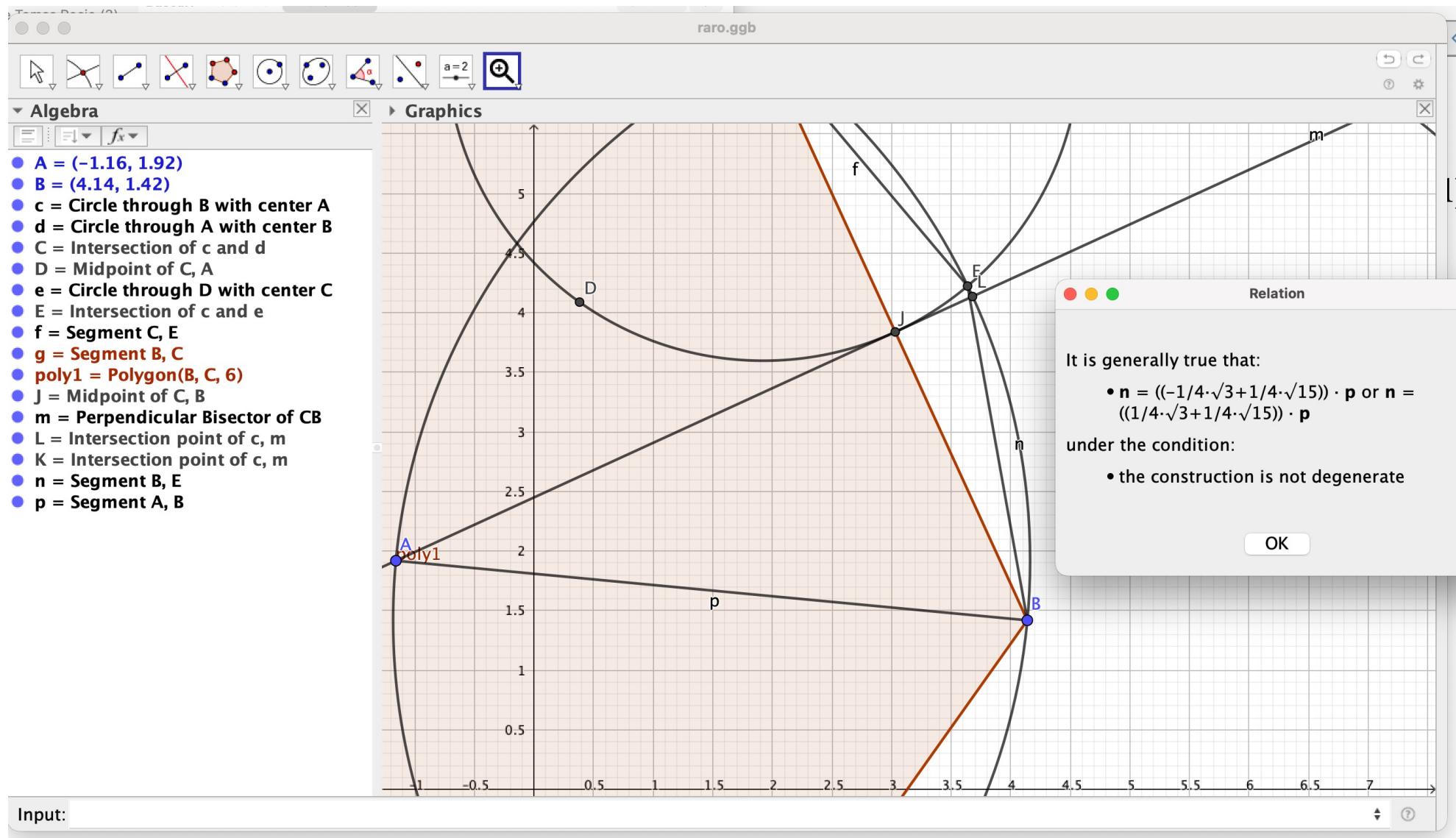
f y j son perpendiculares (comprobado numéricamente)

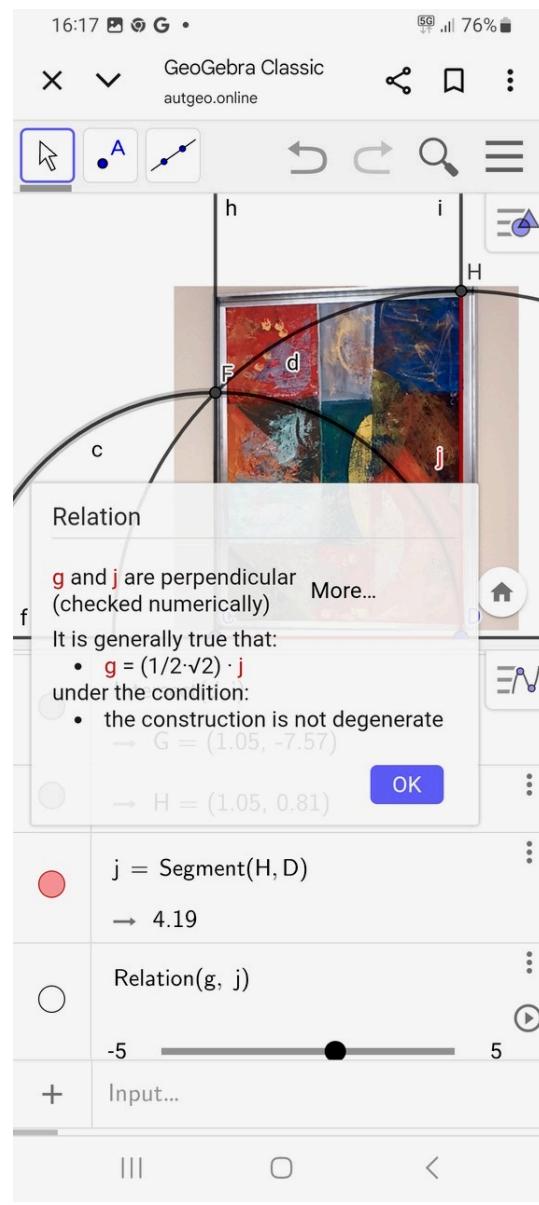
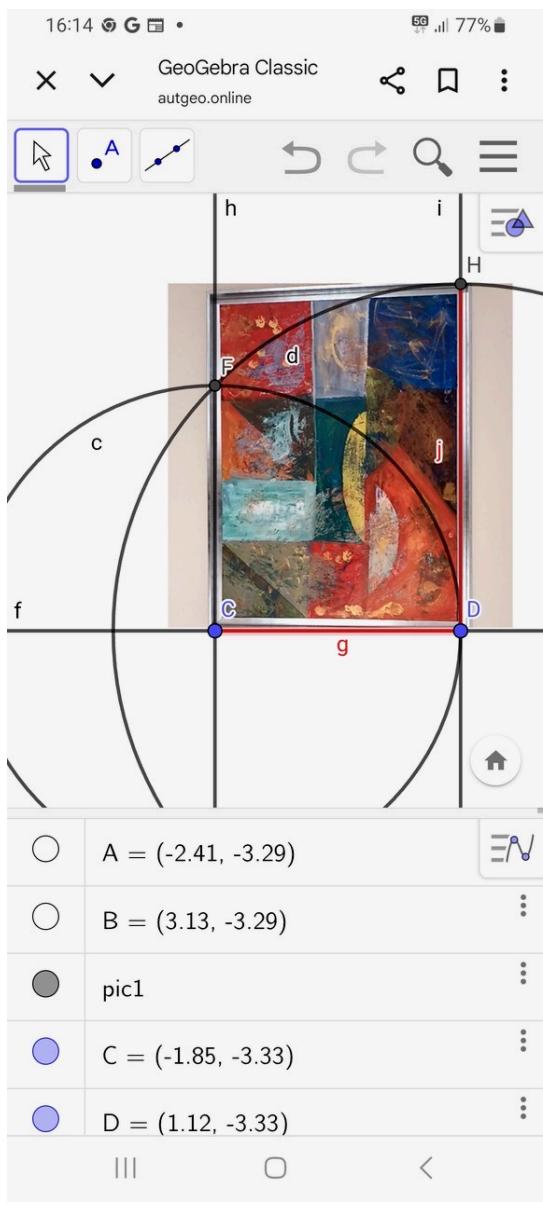
Más... OK

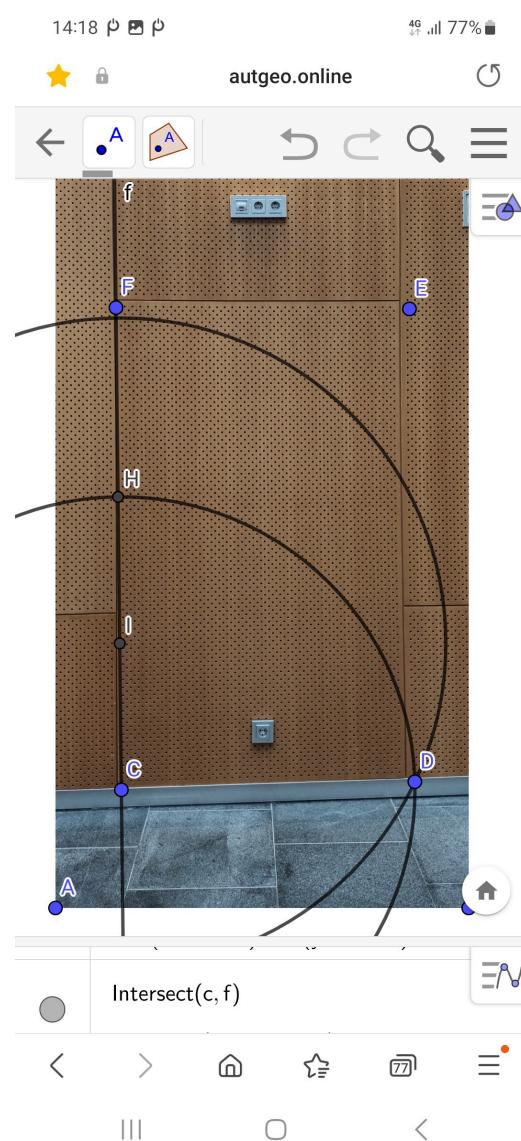
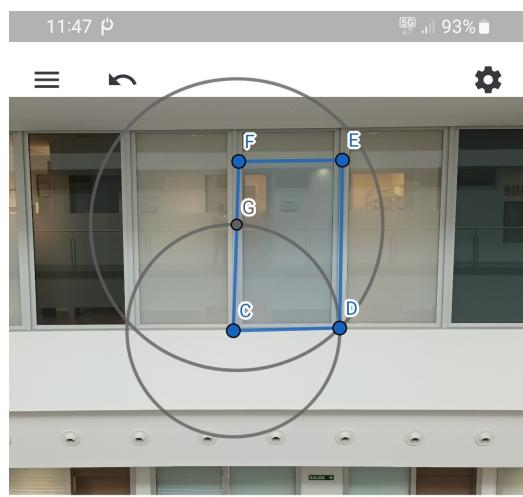
Entrada:











GeoGebra Discovery 5

Vista Algebraica

- A = (-3.46, -0.51)
- B = (8.88, -0.71)
- C = (-3.4, 4.96)
- D = (1.42, 4.92)
- f = Recta C D
- g = Recta que pasa por C perpendicular a f
- c = Circunferencia que pasa por D con centro C
- E = Intersección de c, g
- F = Punto medio de C, E
- G = Punto medio de C, F
- H = Punto medio de C, G
- d = Circunferencia que pasa por D con centro H
- h = Segmento [C, D]
- I = Intersección de d, g
- i = Segmento [C, I]

Vista Gráfica

Relación

Lo que es generalmente cierto es que:

- $h = ((1/8 \cdot (\sqrt{65} - 1)) \cdot i)$ o $h = ((1/8 \cdot (\sqrt{65} + 1)) \cdot i)$

bajo la condición:

- la construcción no es degenerada

Más...

OK

Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán

Entrada:

17 Trasladando mensajes MS. Caitlin Sn... Entrada - trec... TOMAS RECIO MUNIZ Re: [Computers] (IF Z.b, Cities... /15/25

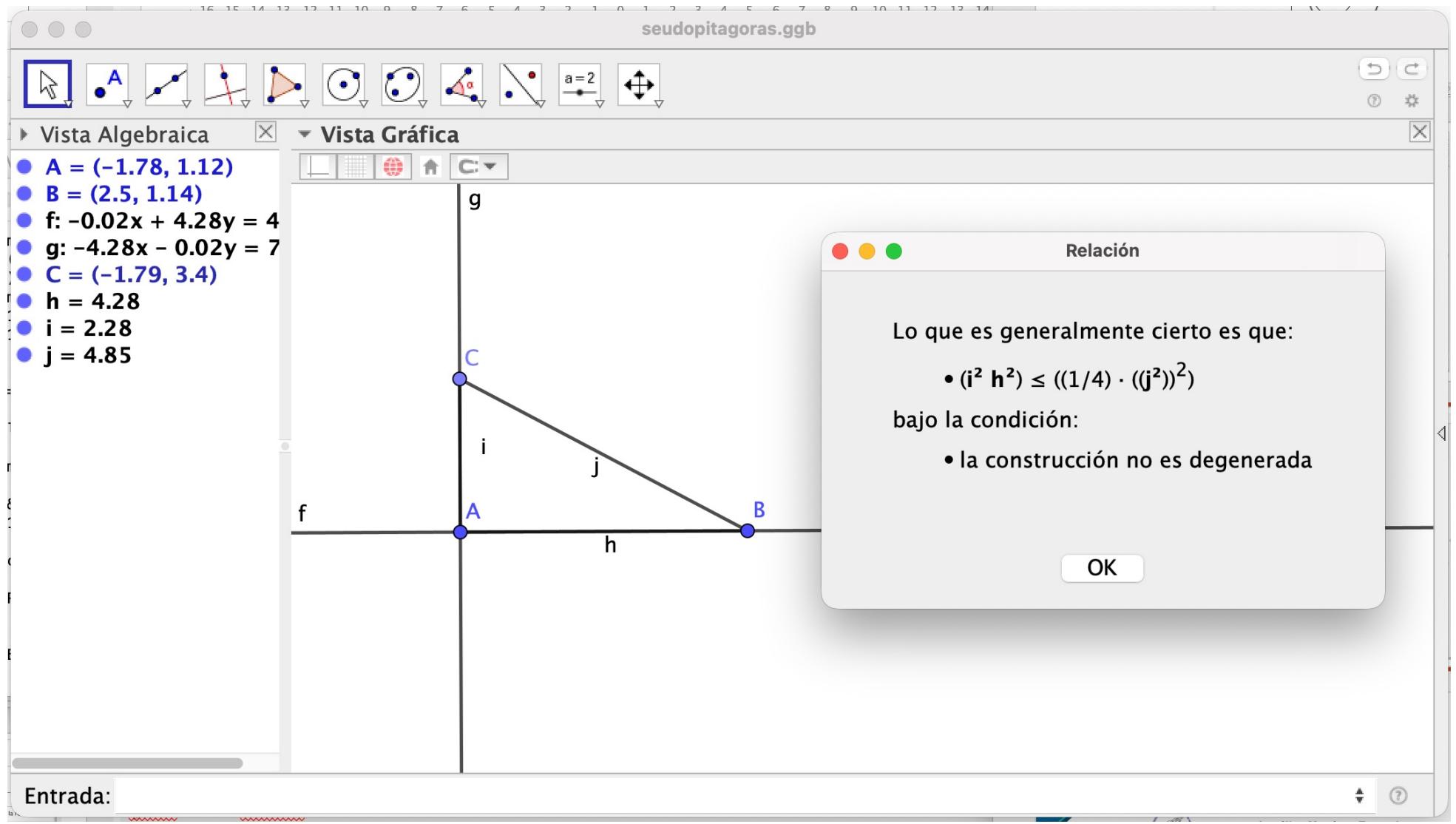
elipse tres puntos.ggb

Algebra

- A = (-2.42, 1.42)
- B = (3.38, 1.42)
- C = (-1.74, 2.93)
- D = (2.27, 2.94)
- f = Line C, D
- g = Perpendicular Bisector of CD
- E = Point on g
- F = Intersection of f and g
- E' = E mirrored at F
- h = Segment F, D
- c = Circle with center E and radius h
- G = Intersection of c and f
- L = Intersection point of c, f
- K = Intersection point of c, f
- d = Ellipse with foci G, L passing through E
- M = (-1.01, 3.48)
- i = Segment G, M
- j = Segment M, L
- k = Segment C, D
- ec1 = LocusEquation(i + j \perp k, M)

Graphics

Input:



GeoGebra Discovery 5

Vista Algebraica Vista Gráfica

- A = (-1.78, 1.12)
- B = (2.5, 1.14)
- f: $-0.02x + 4.28y = 4$
- g: $-4.28x - 0.02y = 7$
- C = (-1.79, 3.4)
- h = 4.28
- i = 2.28
- j = 4.85

Relación

Lo que es generalmente cierto es que:

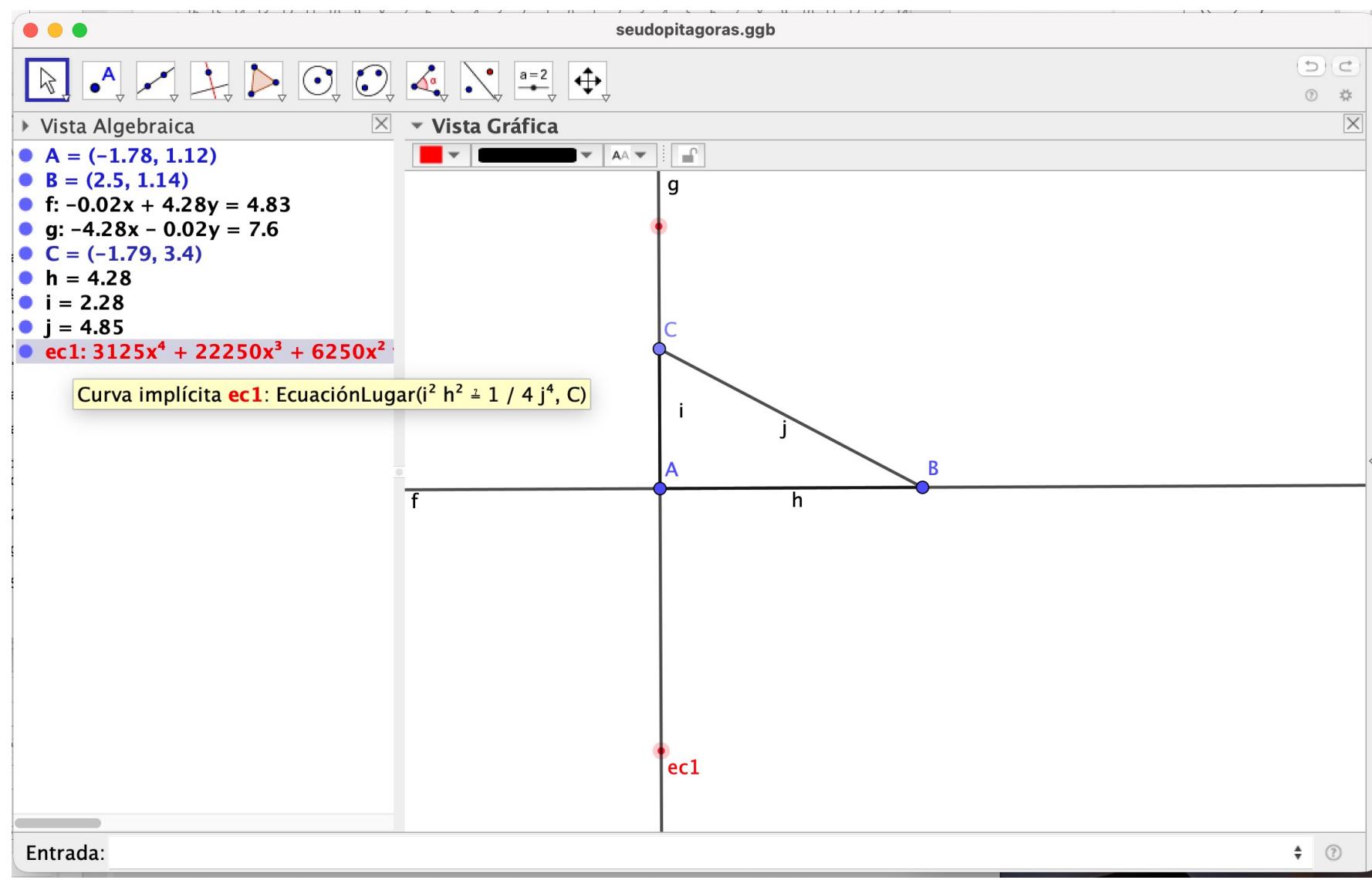
- $(i \cdot h) \leq ((1/2) \cdot (j)^2)$

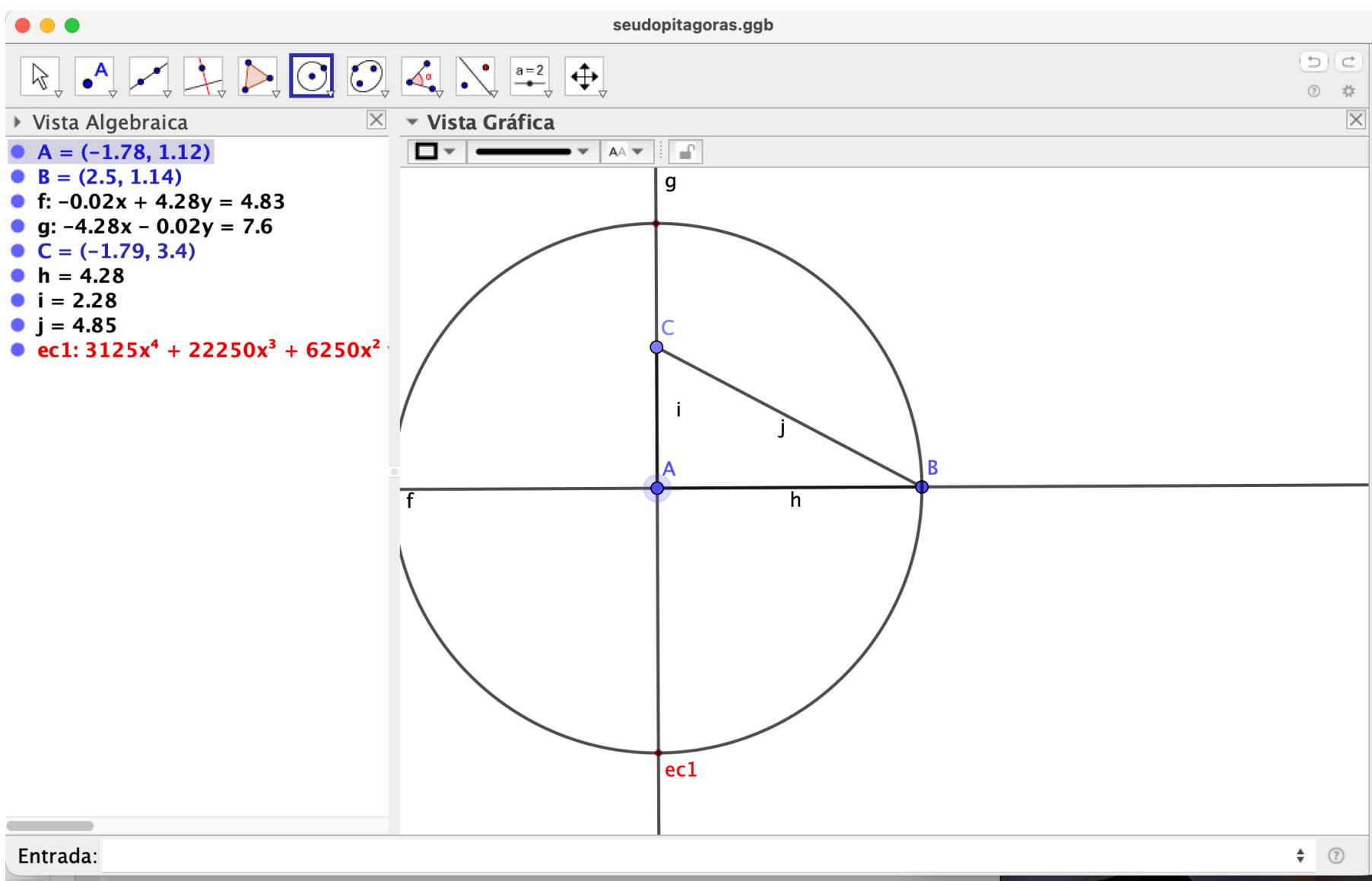
bajo la condición:

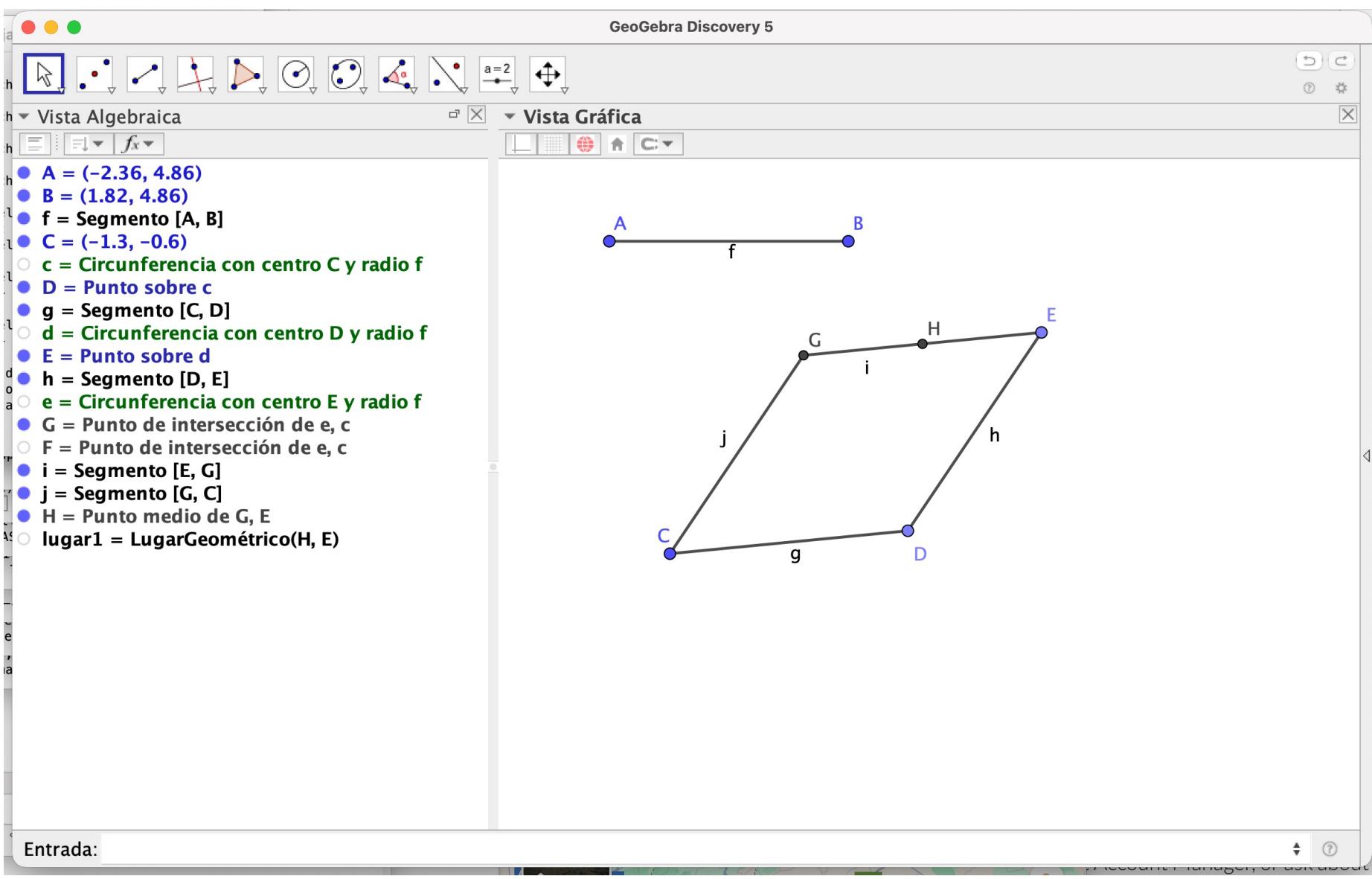
- la construcción no es degenerada

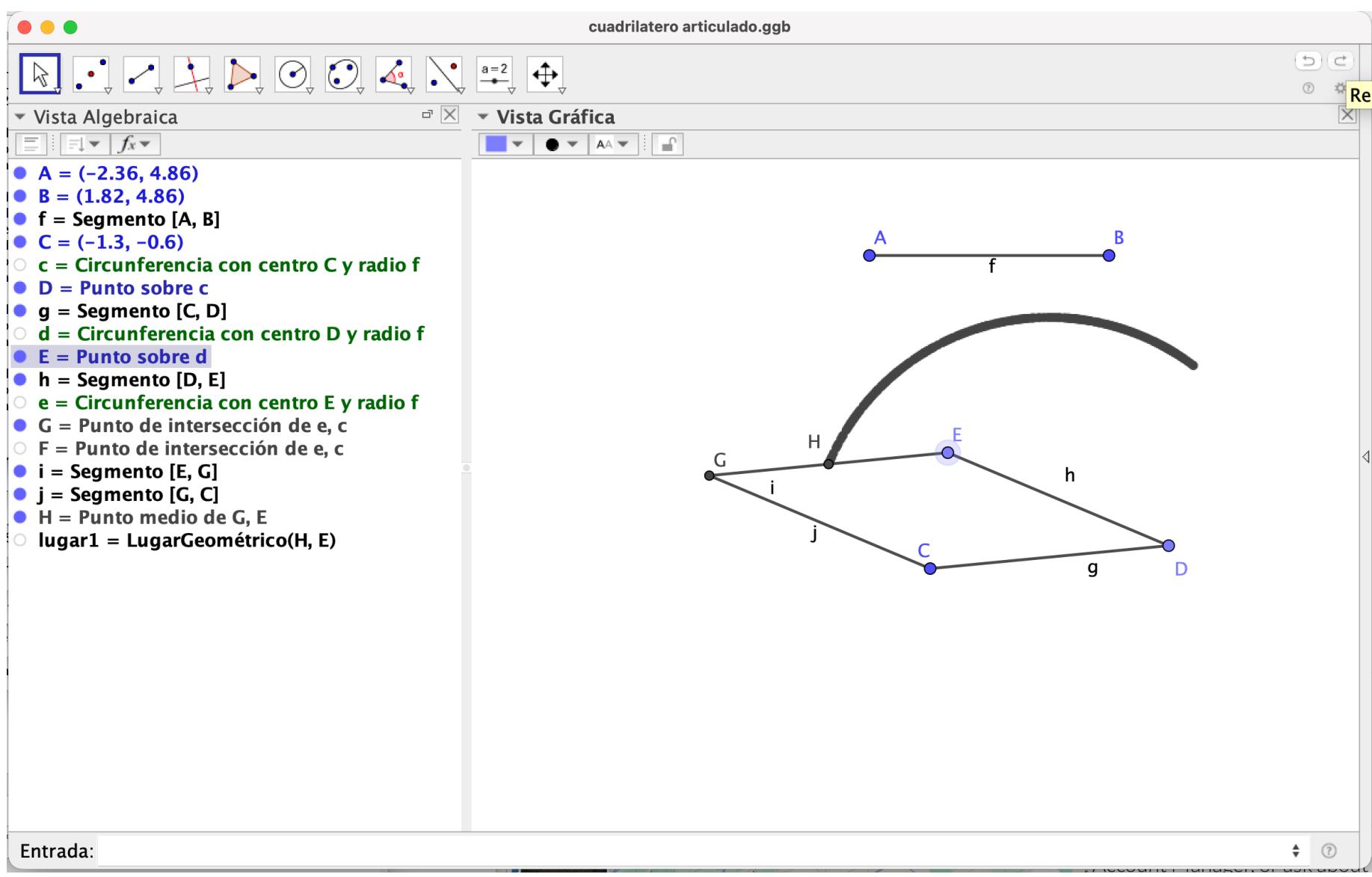
OK

Entrada:









autgeo.online

GeoGebra Clásico

1 Sean A, B, C puntos arbitrarios.

2 Sea f: Segmento [A, B].

3 Sea c: circunferencia con centro C y radio f.

4 Sea D: punto sobre c.

5 Sea d: circunferencia con centro D y radio f.

6 Sea E: punto sobre d.

7 Sea e: circunferencia con centro E y radio f.

8 Sea F: intersección de c, e.

9 Sea H: punto medio de F, E.

10 Sea I: punto medio de C, D.

11 Sea p: circunferencia con centro I y radio f.

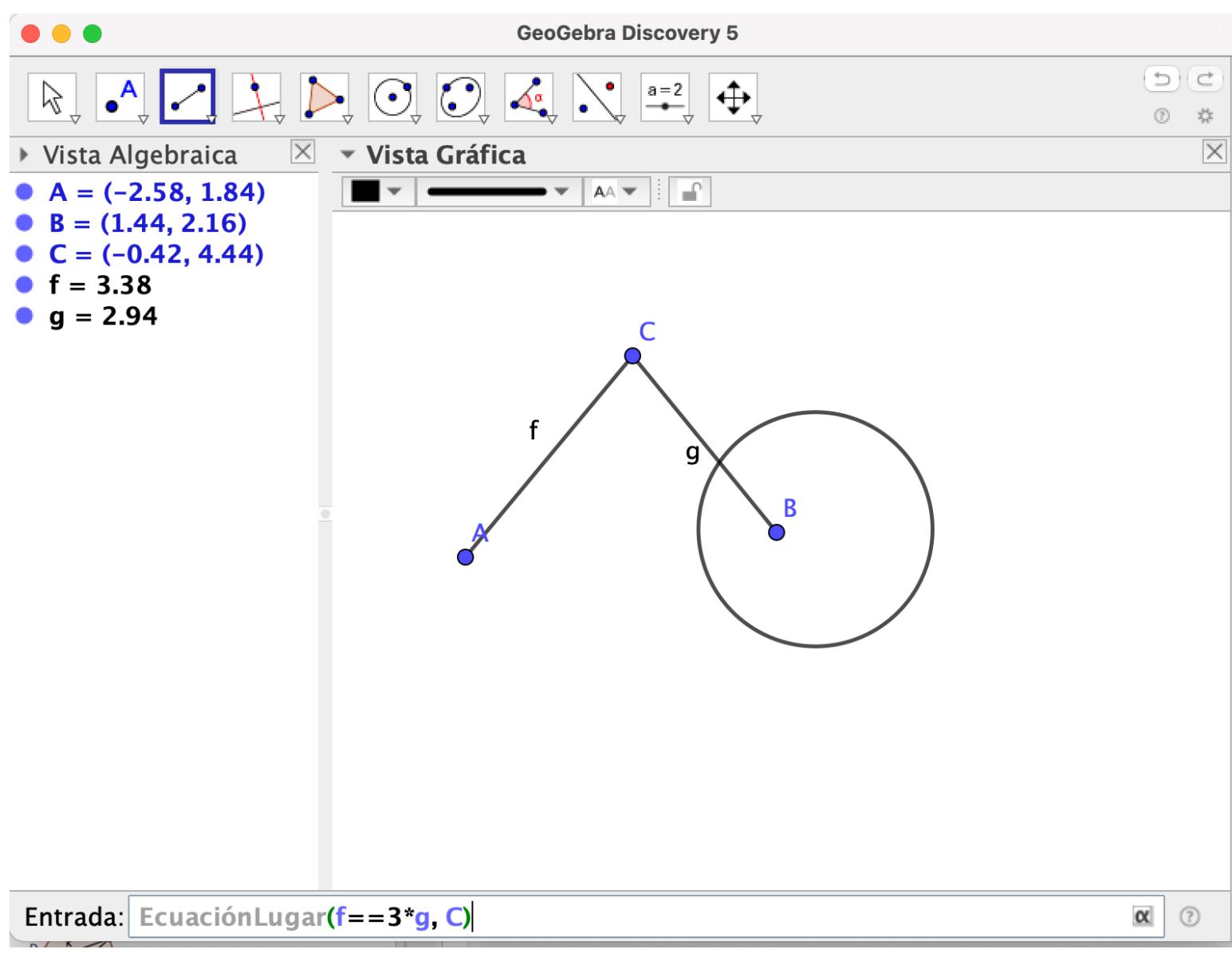
12 Demuestra que H ∈ p.

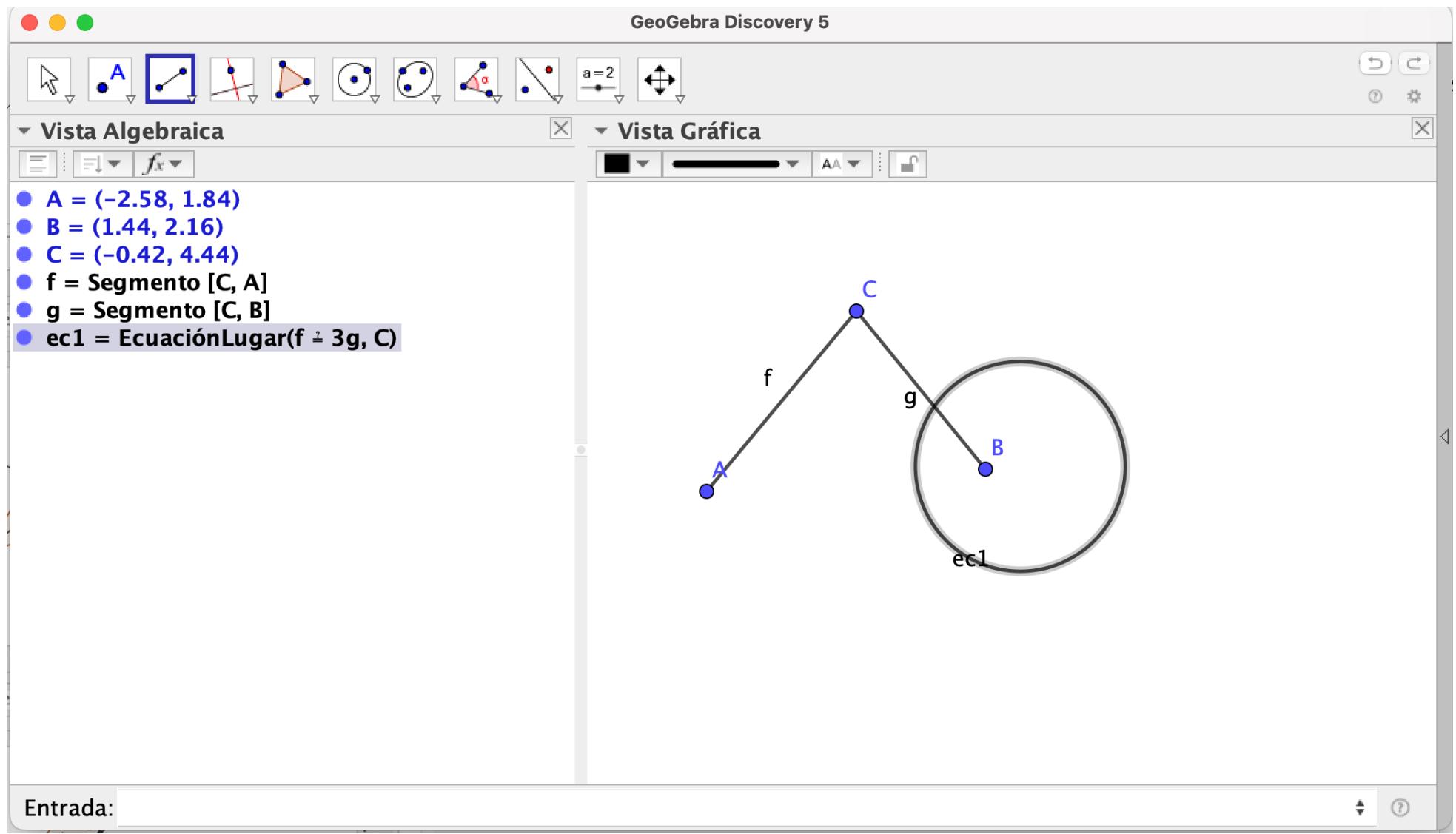
13 La proposición es parcialmente verdad, parcialmente falsa.

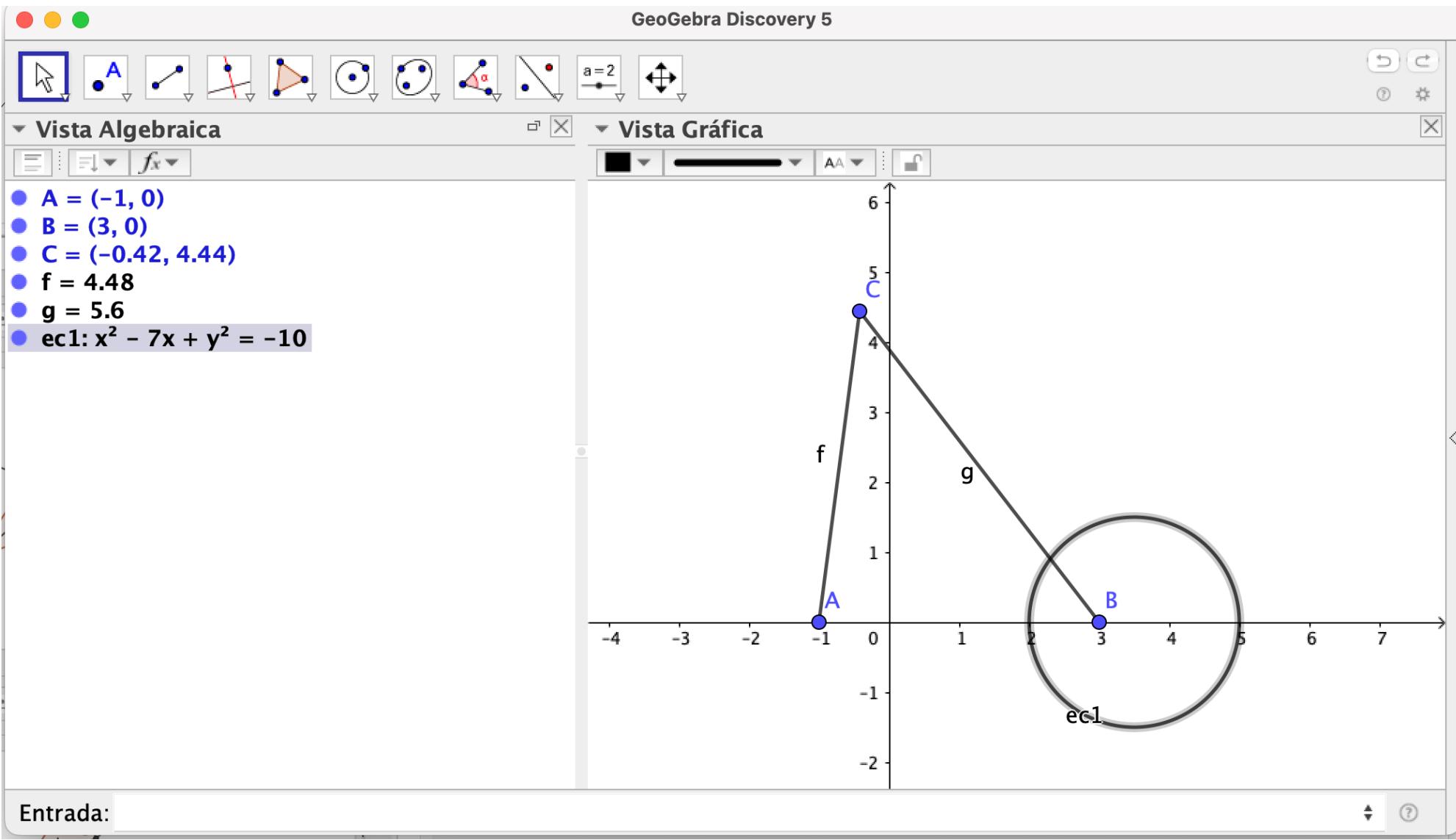
14

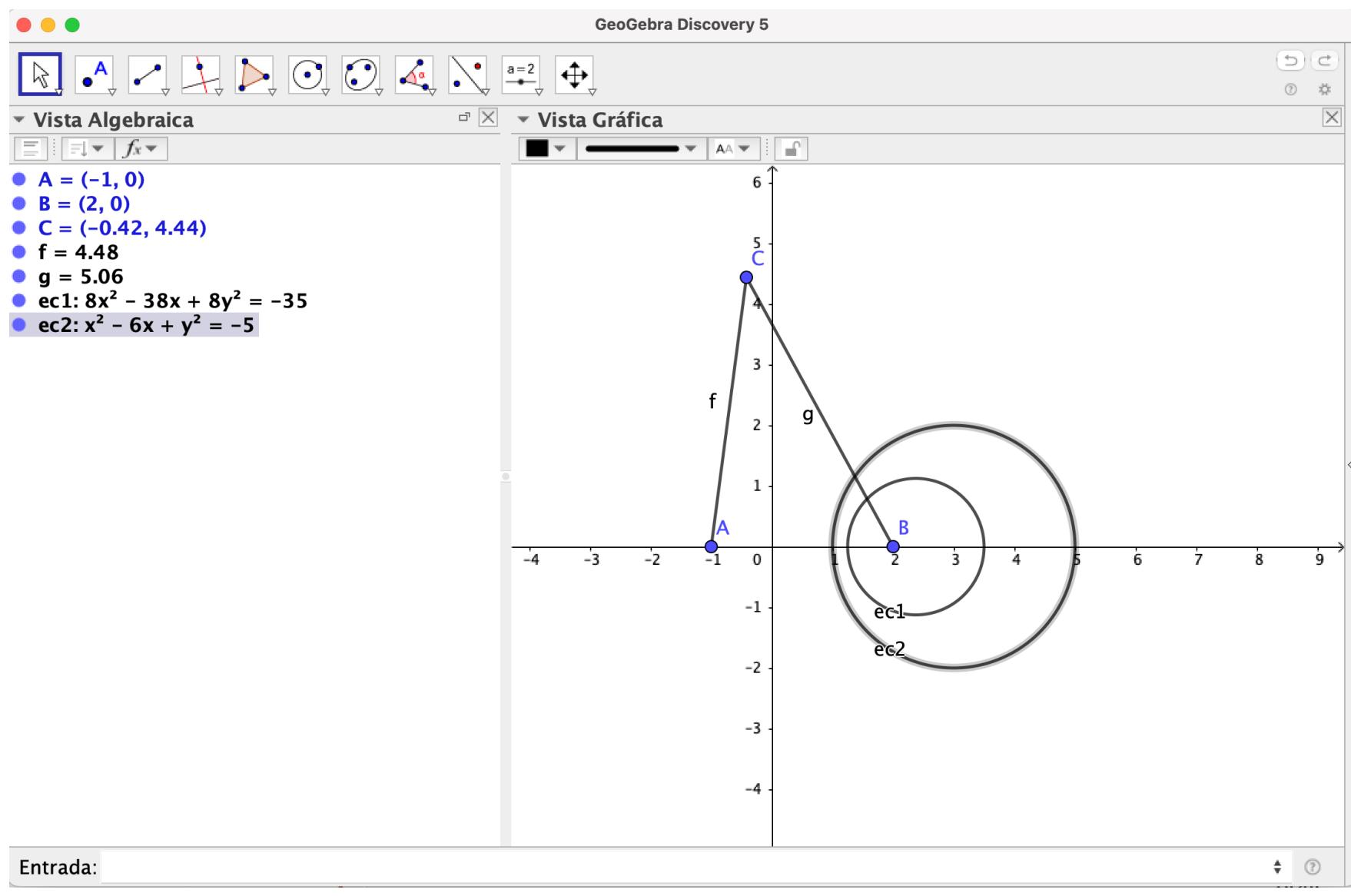
d = Circunferencia con centro D y radio f
E = Punto sobre d
h = Segmento [D, E]
→ 4.18
e = Circunferencia con centro E y radio f
F = Intersección de c, e
i = Segmento [F, E]
→ 4.18
j = Segmento [F, C]
→ 4.18
G = Punto medio de F, E
a = EcuaciónLugar(G, E)
H = Punto medio de F, E
k = Circunferencia que pasa por H con centro D
l = Segmento [H, D]
→ 5.66
I = Punto medio de C, D
m = Segmento [H, I]
→ 4.18
p = Circunferencia con centro I y radio f
b = Demuestra(H ∈ p)
→ true

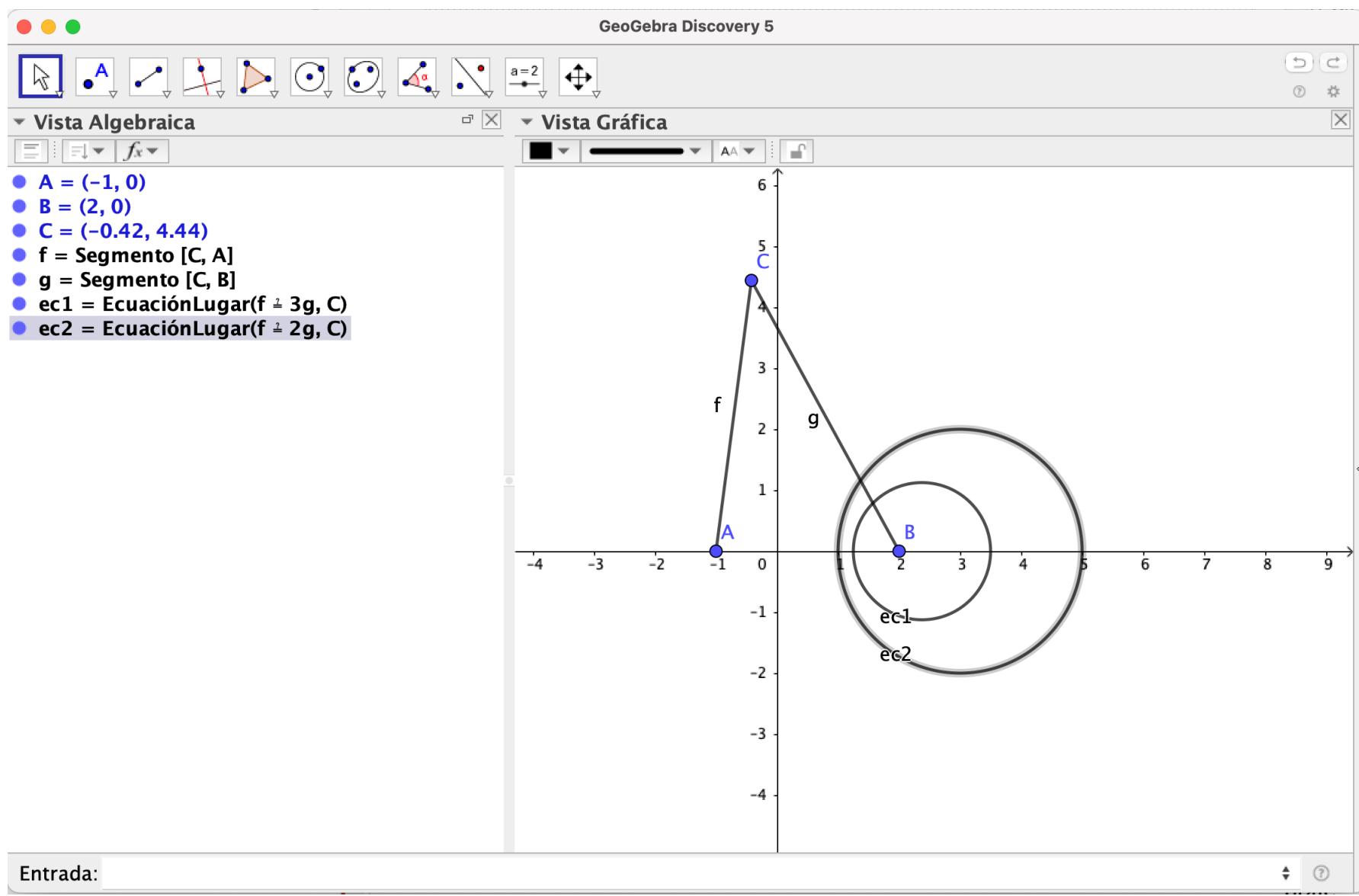
Entrada...

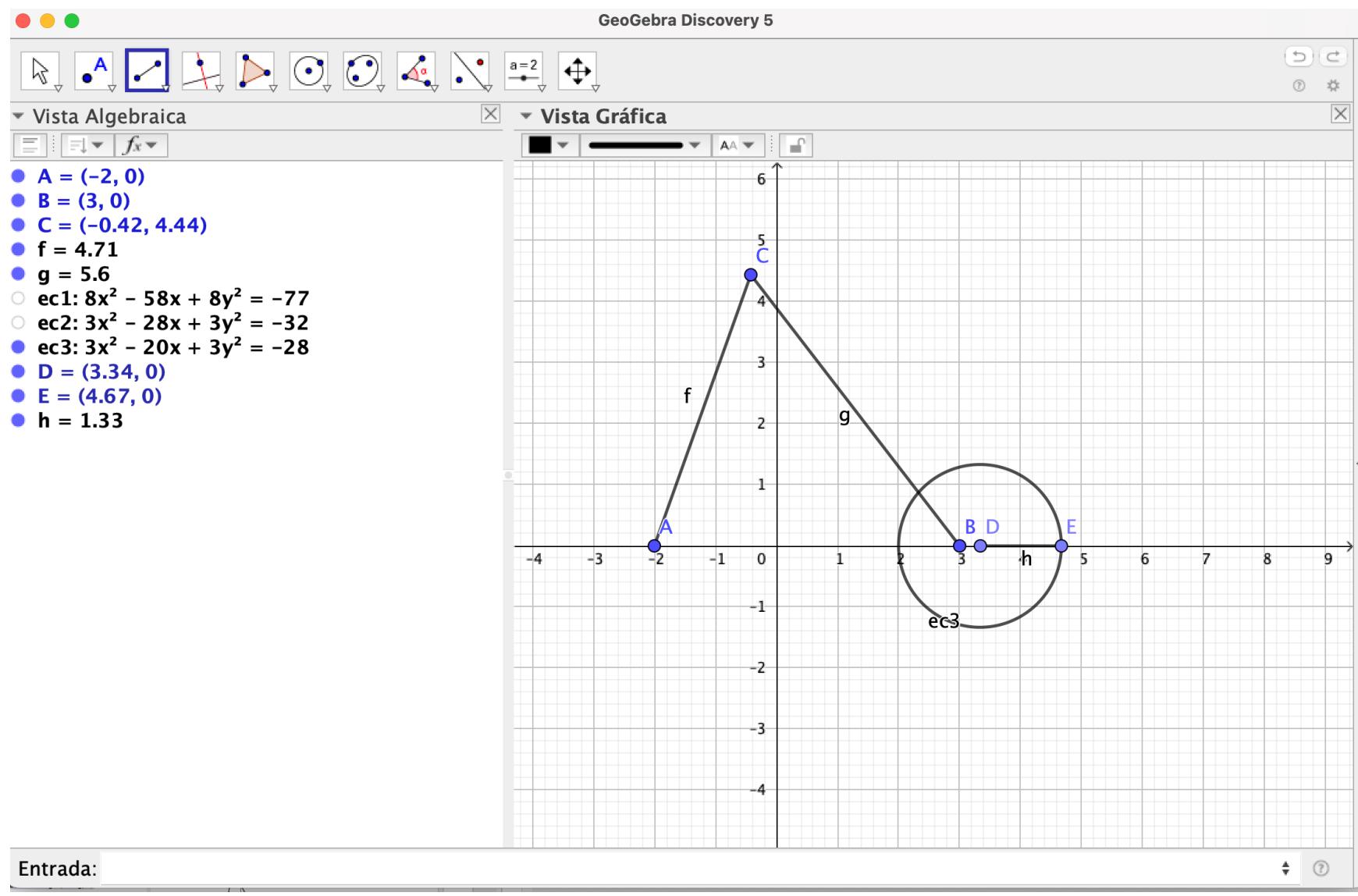


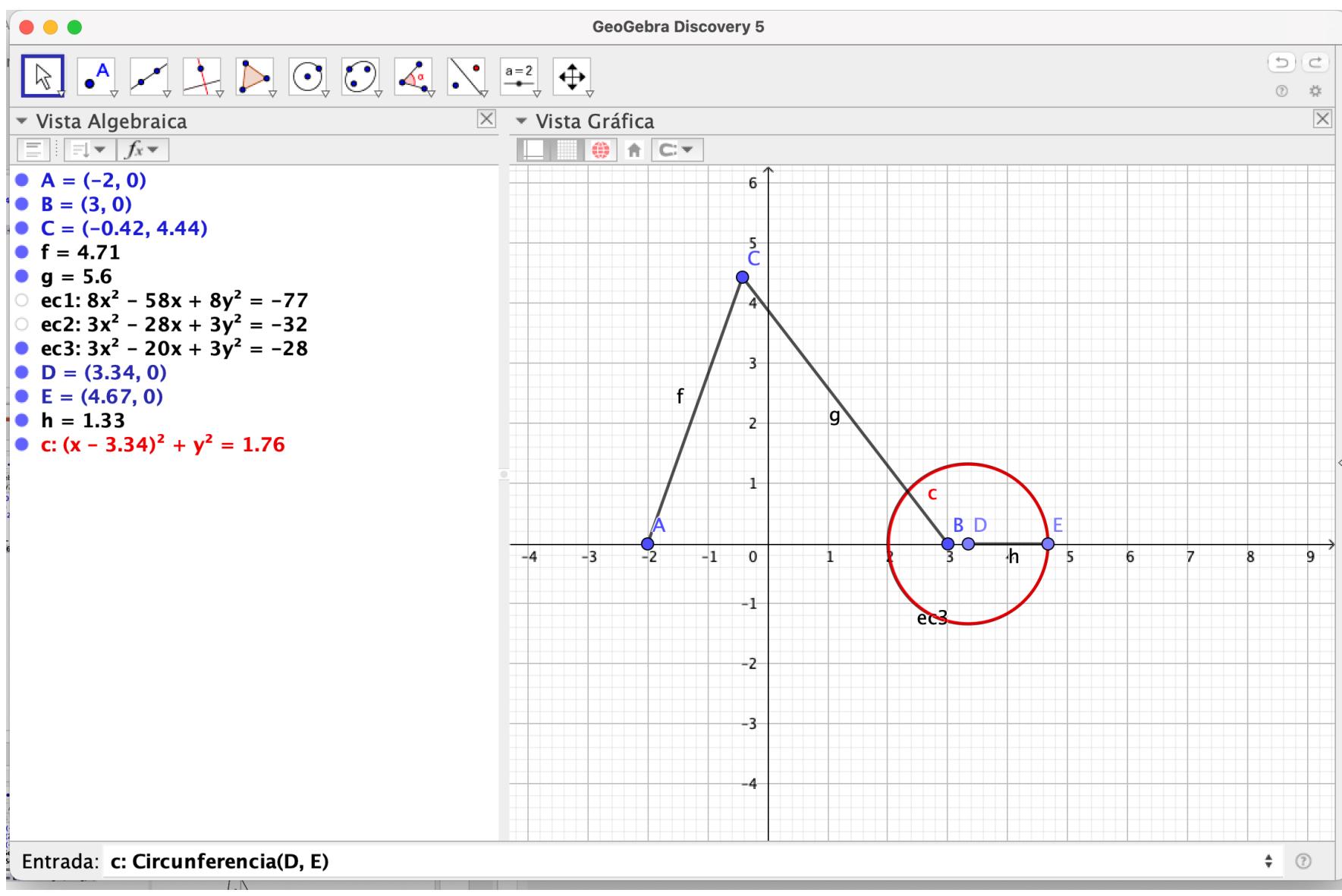












Matemáticas,
más de lo que imaginas

XVI CONGRESO REGIONAL DE
EDUCACIÓN MATEMÁTICA
V JORNADA DE GEOGEBRA
CASTILLA Y LEÓN



<https://forms.gle/UwASwoM3MduLQuYk8>

GRACIAS

Tomás Recio
trecio@nebrija.es

Angélica Martínez-Zarzuelo
angelica.martinez@ucm.es